



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.















# ARCHIV

der

# MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren  
Unterrichtsanstalten.

---

Gegründet von

**J. A. Grunert,**

fortgesetzt von

**R. Hoppe.**

Sechsendsechzigster Teil.

---

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,  
J. Sengbusch.

1881.

162493

УДАВАЛ ОДОУМАТ



## IV

N<sup>o</sup> der Abhandlung.

Heft. Seite.

**Integralrechnung.**

VIII.	Ueber eine Verallgemeinerung der Gauss'schen Methode der mechanischen Quadratur. Von F. August in Berlin . . . . .	I.	72
X.	Ueber die von Challis vorgeschlagene neue Integrationsmethode von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und ihre Anwendung auf gewisse ungelöste Aufgaben aus der Variationsrechnung. Von Magnus Ehrhorn . . . . .	II.	113
XIV.	Beitrag zu einer Classe von bestimmten Integralen complexer Functionen. Von Niemoëller . . . . .	III.	225
XV.	Sur des polynômes de deux variables analogues aux polynômes de Jacobi. Par P. Appell . . . . .	III.	238

**Geometrie der Ebene.**

I.	Zur Construction der Schnittpunkte von Geraden mit Kegelschnitten. Von Prof. Carl Pelz . . . . .	I.	1
II.	Lieu des centres des cercles tangents intérieurement à un demi-cercle, et extérieurement aux deux demi-cercles, qui ont pour diamètres les deux segments du diamètre du premier demi-cercle. Par Georges Dostor . . . . .	I.	17
III.	Distances des trois sommets d'un triangle au centre du cercle, qui passe par les pieds des trois hauteurs du triangle. Par Georges Dostor . . . . .	I.	24
IV.	Les trois quadrilatères convexes d'Albert Girard, qui ont mêmes côtés, même surface et sont inscriptibles dans le même cercle. Par Georges Dostor . . . . .	I.	27
XIII.	Ein Beitrag zur Theorie der merkwürdigen Punkte im Dreieck. Von J. Lange . . . . .	II.	220
XVI.	Ueber einen speciellen Fall des Apollonischen Tactionsproblems. Von K. E. Hoffmann . . . . .	III.	246
XVIII.	Zur Polaritätstheorie der Kegelschnitte. Von Emil Hain . . . . .	III.	274
XIX.	Ueber das Transversalensystem zweier Punkte. Von Emil Hain . . . . .	III.	280

















































aux trois demi-cercles décrit une ellipse, dont les axes sont l'un parallèle au diamètre  $EF$ , et l'autre dirigé suivant la perpendiculaire menée à  $EF$  par le centre  $O$  du demi-cercle donné.

Cette ellipse coupe les deux axes de coordonnées aux points  $y = 0, x = \pm a; x = 0, y = \frac{2a}{3}$  et  $y = 2a$ .

4. **Elements de l'ellipse.** Le centre de notre lieu géométrique (IV) s'obtient en égalant à zéro les deux dérivées

$$8x, \quad 6y + 4a$$

de son équation. Les coordonnées du centre de l'ellipse sont donc

$$(2) \quad x = 0, \quad y = -\frac{2a}{3}.$$

Ainsi le centre de l'ellipse est situé sur la perpendiculaire menée par le centre  $O$  au diamètre  $EF$ , à une distance au-dessous de ce centre  $O$  égale au tiers du diamètre  $EF$ .

L'équation de l'ellipse rapportée à son centre sera par suite

$$(3) \quad 4x^2 + 3y'^2 - \frac{16a^2}{3} = 0$$

ou

$$12x^2 + 9y'^2 - 16a^2 = 0,$$

où l'on a

$$(4) \quad y' = y + \frac{2a}{3}.$$

Les deux demi-axes de l'ellipse sont

$$(5) \quad A = \frac{2a}{\sqrt{3}}, \quad B = \frac{4a}{3},$$

d'où on tire pour la demi-distance focale

$$(6) \quad C = \sqrt{B^2 - A^2} = \frac{2a}{3}.$$

Nous voyons ainsi que le centre du demi-cercle donné est l'un des foyers de l'ellipse.

Les équations des deux directrices, rapportées au centre de l'ellipse, sont

$$(7) \quad y' = \pm \frac{B^2}{C} = \pm \frac{8a}{3}.$$

Rapportées au centre  $O$  du demi-cercle donné, elles ont pour équations

$$y + \frac{2a}{3} = \pm \frac{8a}{3},$$

ou

$$(8) \quad y = 2a \quad \text{et} \quad y = -\frac{10a}{3}.$$

5. Triangle dont les sommets sont le centre  $A$  du cercle tangent et les centres  $B, C$  des deux demi-cercles construits sur les diamètres  $ED = 2b$ ,  $DF = 2c$ . Nous avons pour la surface de ce triangle

$$S = BC \cdot \frac{AP}{2} = (b + c)z = az$$

au

$$(9) \quad S = \frac{2a^2bc}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{a^2bc}{a^2 - bc}.$$

Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  les trois côtés du  $BC, CA, AB$  du triangle  $ABC$ ,  $2p$  son périmètre,  $R$  le rayon du cercle circonscrit,  $r$  le rayon du cercle inscrit; et  $r', r'', r'''$  les rayons des trois cercles ex-inscrits. Nous avons

$$\alpha = b + c, \quad \beta = c + z, \quad \gamma = b + z;$$

d'où nous tirons

$$p = b + c + z = a + z, \\ p - \alpha = z, \quad p - \beta = b, \quad p - \gamma = c.$$

Il nous vient par conséquent

$$r = \frac{S}{p} = \frac{az}{a + z},$$

$$r' = \frac{S}{p - \alpha} = \frac{az}{z},$$

$$r'' = \frac{S}{p - \beta} = \frac{az}{b},$$

$$r''' = \frac{S}{p - \gamma} = \frac{az}{c}.$$

Puisque

$$r = \frac{az}{a + z} = \frac{a}{1 + \frac{a}{z}},$$

et que

$$1 + \frac{a}{z} = 1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{a^2 + (b + c)^2}{2bc} = \frac{a^2}{bc},$$

nous trouvons que

$$(10) \quad r = \frac{bc}{a}.$$

Ainsi le diamètre du cercle inscrit dans notre triangle est la quatrième proportionnelle au diamètre du demi-cercle donné et aux diamètres des deux autres demi-cercles.

L'égalité

$$(11) \quad r' = \frac{as}{z} = a$$

prouve que le cercle ex-inscrit, qui est opposé à l'angle  $BAC$  a même rayon que le demi-cercle donné.

Les deux autres relations nous donnent

$$(12) \quad r'' = \frac{2a^2c}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a^2c}{a^2-bc}, \quad r''' = \frac{2a^2b}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a^2b}{a^2-bc}.$$

Le rayon  $R$  du cercle circonscrit est donné par la formule  $2R \cdot AP = AB \cdot AC$  ou

$$4Rz = (b+z)(c+z),$$

que l'on peut écrire

$$4R = z \left(1 + \frac{b}{z}\right) \left(1 + \frac{c}{z}\right);$$

mais il est aisé de voir, d'après la valeur (I), que

$$1 + \frac{b}{z} = \frac{a^2+c^2}{ac}, \quad 1 + \frac{c}{z} = \frac{a^2+b^2}{ab};$$

il vient donc

$$4R = \frac{2abc}{a^2+b^2+c^2} \cdot \frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a^2bc},$$

ou

$$(13) \quad 2aR = \frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}.$$

Les valeurs (12) ou leurs équivalentes  $r'' = \frac{az}{b}$ ,  $r''' = \frac{az}{c}$  nous donnent

$$\frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} = \frac{b}{az} + \frac{c}{az} = \frac{b+c}{az},$$

au

$$(14) \quad \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} = \frac{1}{z}.$$

Ainsi l'inverse du rayon du cercle tangent aux trois demi-cercles est égale à la somme des inverses des ray-

ons des deux cercles ex-inscrits au triangle  $ABC$ , qui sont opposés aux angles  $B$  et  $C$ .

Puisque

$$s = \frac{abc}{a^2 - bc}, \quad bc = ar,$$

il vient aussi

$$\frac{1}{s} = \frac{a^2 - ar}{a^2 r} = \frac{a - r}{ar},$$

ou

$$(15) \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{1}{a}.$$

6. Volume engendré par la surface comprise entre les trois demi-cercles, en tournant autour du diamètre  $EF$ . Ce surface a d'abord pour expression

$$(16) \quad S = \frac{1}{2}\pi(a^2 - b^2 - c^2) = \pi bc.$$

Dans sa révolution elle engendre le volume

$$V = \frac{4}{3}\pi(a^3 - b^3 - c^3);$$

mais, puisque  $a = b + c$ , nous avons

$$a^3 - b^3 - c^3 = 3b^2c + 3bc^2 = 3bc(b + c) = 3abc.$$

Il nous vient donc pour ce volume l'expression remarquable

$$(17) \quad V = 4\pi abc.$$

On a par suite

$$V = S' \times 4a.$$

Le volume  $V'$ , qui est engendré par la révolution du cercle  $A$ , tangent aux trois demi-cercles, est d'ailleurs

$$V' = \pi s^2 \cdot 4\pi s = 4\pi^2 s^3$$

ou

$$V' = (2\pi s)^2 \cdot s;$$

il a donc pour mesure le produit du carré de la circonférence par le rayon.



## III.

Distances des trois sommets d'un triangle  
au centre du cercle, qui passe par les pieds des  
trois hauteurs du triangle.

Par

**Georges Dostor.**

---

1. Désignons par  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  les trois côtés du triangle  $ABC$ . Des sommets  $A, B, C$  abaissons, sur les côtés opposés, les perpendiculaires  $AA_1, BB_1, CC_1$ ; les points  $A_1, B_1, C_1$  seront les pieds des trois hauteurs du triangle donné; ils sont les sommets d'un triangle  $A_1B_1C_1$ , qu'en Allemagne on appelle *Hoehendreieck* et que les Anglais nomment *Triangle orthocentrique*. Le cercle circonscrit à ce triangle, ou le cercle des neuf points, a fixé l'attention de beaucoup de géomètres.

Nous nous proposons de déterminer les distances des sommets  $A, B, C$  du triangle donné au centre  $O_1$  du cercle circonscrit à ce triangle  $A_1B_1C_1$ ; ainsi que la distance de ce centre  $O_1$  au point de concours  $H$  des hauteurs  $AA_1, BB_1, CC_1$ .

2. Représentons par  $R_1$  le rayon du cercle circonscrit au triangle  $A_1B_1C_1$ ; par  $r_1$  le rayon du cercle inscrit; et par  $r_1', r_1'', r_1'''$  les rayons des cercles ex-inscrits.

Les points  $A, B, C$  étant les centres des trois cercles ex-inscrits au triangle  $A_1B_1C_1$  et le point  $H$  étant le centre du cercle inscrit dans le même triangle, nous avons, d'après le théorème d'Euler

(1)

$$\overline{AO_1}^2 = R_1^2 + 2R_1r_1', \quad \overline{BO_1}^2 = R_1^2 + 2R_1r_1'', \quad \overline{CO_1}^2 = R_1^2 + 2R_1r_1''';$$

(2)

$$\overline{HO_1}^2 = R_1^2 - 2R_1r_1.$$



Or de la valeur (3) on tire

$$4Rr_1' = 2bc \cos A,$$

de sorte que l'on a

$$4Rr_1' = b^2 + c^2 - a^2,$$

$$4Rr_1'' = c^2 + a^2 - b^2,$$

$$4Rr_1''' = a^2 + b^2 - c^2;$$

et, en ajoutant,

$$4R(r_1' + r_1'' + r_1''') = a^2 + b^2 + c^2.$$

La relation (4) se réduit donc à

$$(III) \quad 4\overline{HO_1}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

5. Si nous faisons la somme de (II) et (III), nous trouverons que

$$(IV) \quad \overline{AO_1}^2 + \overline{BO_1}^2 + \overline{CO_1}^2 + \overline{HO_1}^2 = 3R^2.$$





centre  $O$  du cercle circonscrit, et qui sont respectivement opposés aux côtés  $a, b, c, d$ .

Quel que soit l'ordre de succession de ces côtés, nous avons toujours

$$(1) \quad a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma, \quad d = 2R \sin \delta,$$

où les angles  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont assujettis à la condition

$$(2) \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi.$$

4. Trois cas peut se présenter pour la disposition des côtés  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ , suivant que l'un  $\underline{a}$  des côtés est opposé au côté  $c$ , au côté  $d$  ou bien au côté  $b$ .

**Premier cas.** Les côtés se suivent dans l'ordre  $a, b, c, d$ .

Marquons des lettres  $M$  et  $N$  les extrémités du côté  $a$  et portons les lettres  $P$  et  $Q$  aux deux autres sommets.

Les quatre angles consécutifs du quadrilatère seront évidemment

$$(3) \quad M = \beta + \gamma, \quad N = \gamma + \delta, \quad P = \delta + \alpha, \quad Q = \alpha + \beta;$$

pendant que

$$(4) \quad QIM = NIP = \beta + \delta, \quad MIN = PIQ = \alpha + \gamma,$$

où  $I$  désigne le point d'intersection des deux diagonales, seront les angles de ces diagonales.

Si  $E$  et  $F$  sont les angles, qui sont compris entre les côtés opposés  $a$  et  $c$ ,  $b$  et  $d$  du quadrilatère, nous aurons naturellement, en vertu de (2) et (3),

$$(5) \quad \begin{cases} E = \pi - (N + P) = \pi - (\gamma + 2\delta + \alpha) = \beta - \delta, \\ F = \pi - (M + N) = \pi - (\beta + 2\gamma + \delta) = \alpha - \gamma. \end{cases}$$

Les longueurs des diagonales, qui sont issues des sommet  $M$  et  $N$ , c'est-à-dire, des extrémités du côté  $a$ , sont d'ailleurs

$$(6) \quad x = 2R \sin(\gamma + \delta), \quad y = 2R \sin(\delta + \alpha).$$

5. **Deuxième cas.** Les côtés sont rangés dans l'ordre  $a, b, d, c$ .

Marquons les sommets consécutifs des lettres  $M', N', P', Q'$ ; et soient  $I'$  l'intersection des diagonales,  $x'$  et  $y'$  les longueurs de ces diagonales.







ou, en vertu de (III)

$$x^2y^2z^2 = 16R^2S^2 ;$$

on en tire

(IV)

$$xyz = 2S.2R.$$

Ainsi le produit des trois diagonales de nos quadrilatères est égal au double produit de leur surface commune par le diamètre du cercle circonscrit.

Des recherches curieuses peuvent être entreprises au sujet de ces quadrilatères; nous en laissons le soin au lecteur.











$$x = \pm \sqrt[m-n]{\frac{np}{n}}$$

und wenn dann die Gleichung 5) drei reelle Wurzeln hat; so müssen dieselben in den Intervallen

$$-\infty, \quad -\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}, \quad +\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}} \quad \text{und} \quad +\infty$$

liegen; damit aber die Gleichung 5) wirklich drei reelle Wurzeln besitze, ist erforderlich, dass

$$f\left(-\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}\right) > 0 \quad \text{und} \quad f\left(+\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}\right) < 0$$

sei; beide Bedingungen liefern aber nach kurzer Reduction:

$$6) \quad \left(\frac{np}{m}\right)^m > \left(\frac{nq}{m-n}\right)^{m-n}$$

Für den speciellen Fall:

$$x^m - px + q = 0$$

erhält man die Bedingung:

$$\left(\frac{p}{m}\right)^m > \left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1},$$

für den Fall:

$$x^m - px^{m-1} + q = 0$$

die Bedingung:

$$\left(\frac{p}{m}\right)^m > \frac{q}{(m-1)^{m-1}}$$

und endlich für die Gleichung 3. Grades:

$$x^3 - px + q = 0$$

die bekannte Bedingung:

$$\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}.$$

Man erkennt zugleich, dass die Gleichung 5) für positive  $q$  zwei positive und eine negative, dagegen für negative  $q$  zwei negative und eine positive Wurzel hat.

Wendet man nun den Algorithmus  $A$  an, so wird

$$x = \sqrt[n]{\frac{-q}{-p + x^{m-n}}} - \sqrt[n]{\frac{q}{p - x^{m-n}}}$$

und die einzelnen Näherungswerte sind:

$$x_1 = \sqrt[n]{\frac{q}{p}}; \quad x_2 = \sqrt[n]{\frac{q}{p - x_1^{m-n}}}; \quad \text{etc.}$$

Man erkennt sofort, dass  $x_2 > x_1$ , ebenso  $x_3 > x_2$  u. s. w. allgemein  $x_r > x_{r-1}$  ist.

Aber aus der Bedingung 6) leitet man ab:

$$q < \frac{m-n}{n} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{m}\right)^m p^m}$$

oder

$$q < \frac{m-n}{m} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{m}\right)^n p^m}$$

folglich ist

$$\frac{q}{p} < \frac{m-n}{m} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{m}\right)^n p^n}$$

und endlich

$$\sqrt[n]{\frac{q}{p}} < \sqrt[n]{\frac{m-n}{m}} \cdot \sqrt[n]{\frac{np}{m}}$$

da aber

$$\frac{m-n}{m} < 1,$$

so erkennt man, dass

$$x_1 = \sqrt[n]{\frac{q}{p}} < \sqrt[n]{\frac{m-n}{m}} \cdot \sqrt[n]{\frac{np}{m}}$$

ist. Setzt man nun in  $x_2$  statt  $x_1$  den vergrößerten Wert  $\sqrt[n]{\frac{np}{m}}$ , so folgt, dass um so mehr

$$x_2 < \sqrt[n]{\frac{q}{p - \frac{np}{m}}}$$

oder

$$x_2 < \sqrt[n]{\frac{m}{m-n}} \cdot \sqrt[n]{\frac{q}{p}}$$

ist; da aber

$$\sqrt[n]{\frac{q}{p}} < \sqrt[n]{\frac{m-n}{m}} \cdot \sqrt[n]{\frac{np}{m}}$$

ist, so folgt, dass auch

$$x_2 < \sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$$

sein muss; analog weiter schliessend, erkennt man leicht, dass alle folgenden

$$x_r < \sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$$

sein müssen; da dieselben aber, wie oben gezeigt wurde, beständig wachsen, so müssen sie sich notwendig einer festen Grenze  $\xi$  nähern, d. h. es muss

$$\xi = \sqrt[n]{\frac{q}{p - \xi^{m-n}}}$$

werden; hieraus erhält man aber

$$\xi^m - p\xi^n + q = 0,$$

mithin ist  $\xi$  eine Wurzel der Gleichung 5) und zwar, da alle  $x_r$  in

dem Intervall 0 bis  $+\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$  liegen, ist  $\xi$  die kleinste positive Wurzel.

In ganz analoger Weise lässt sich zeigen, dass für negative  $q$  der Algorithmus die der Null am nächsten liegende negative Wurzel liefert.

Wendet man dagegen den Algorithmus *B* an, so wird

$$x = \sqrt[m-n]{p - \frac{q}{x^n}}$$

und die einzelnen Näherungswerte sind:

$$x_1 = \sqrt[m-n]{p}, \quad x_2 = \sqrt[m-n]{p - \frac{q}{x_1^n}} \text{ etc.}$$

Man erkennt unmittelbar, dass hier  $x_2 < x_1$  und ebenso  $x_3 < x_2$  und allgemein  $x_r < x_{r-1}$ , d. h. dass die Näherungswerte beständig abnehmen; aber, da  $\frac{n}{m} < 1$ , sieht man auch, dass

$$x_1 = \sqrt[m-n]{p} > \sqrt[m-n]{\frac{np}{m}};$$

dann ist aber auch, wenn man in  $x_2$  für  $x_1$  den kleineren Wert  $\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$  einsetzt,







Die Untersuchung der Näherungswerte gestaltet sich wie oben, weshalb ich die speciellere Betrachtung hier unterlassen kann.

Oben wurden nur positive Wurzeln betrachtet; man erkennt aber, dass für gerade Wurzelexponenten den Radicalen auch das negative Zeichen beigelegt werden kann, und man dadurch auch zu den negativen Wurzeln der trinomischen Gleichung gelangt; in jedem einzelnen Falle findet man aber ähnlich wie oben, dass der Algorithmus *A* nur

eine solche Wurzel liefern kann, welche in dem Intervall  $-\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$  bis 0 liegt, während eine Wurzel, die in dem Intervall  $-\infty$  bis  $-\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$  liegt, nur durch den Algorithmus *B* gefunden werden kann.

Man kann also das Resultat vorstehender Untersuchung folgendermassen aussprechen:

Alle reellen Wurzeln der trinomischen Gleichungen lassen sich durch die betrachteten kettenbruchähnlichen Algorithmen finden, so

zwar, dass der Algorithmus *A* die in dem Intervall  $-\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$  bis  $+\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$  liegenden Wurzeln liefert, während man alle ausserhalb dieses Intervalles liegenden Wurzeln durch den Algorithmus *B* findet.

Dieser Satz lässt sich auch noch ausdehnen auf diejenigen trinomischen Gleichungen, welche nur eine reelle Wurzel besitzen.

Wendet man nun die gewonnenen Resultate auf die oben erwähnte Formel der Rentenrechnung:

$$aq = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

an, woraus, da es sich um die Bestimmung des Zinsfactors  $q$  handelt, die Gleichung:

$$q^{n+1} - \frac{a+r}{a} q^n + \frac{r}{a} = 0$$

folgt, so ist die Bedingung, dass dieselbe 3, resp. 2 reelle Wurzeln besitze:

$$\left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{a+r}{a}\right)^{n+1} > \left(n \cdot \frac{r}{a}\right),$$



























$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau} = \vartheta' - (f'\xi_1' + g'\eta_1' + h'\zeta_1')\vartheta' \\ + l(\xi_1 + \xi_1'') + m(\eta_1 + \eta_1'') + n(\zeta_1 + \zeta_1'')$$

oder:

$$\partial \vartheta_1 = \partial \vartheta + \partial(l\xi_1' + m\eta_1' + n\zeta_1') + (l\xi_1 + m\eta_1 + n\zeta_1)\partial \tau$$

und integrirt von  $s = 0$  bis  $s = e$ , wo der zweite Term der Rechten verschwindet:

$$\vartheta_1 - \vartheta = \int_0^e \frac{l\partial \xi + m\partial \eta + n\partial \zeta}{s'} \\ = - \int_{s=0}^{s=e} \left\{ \xi \partial \left( \frac{l}{s'} \right) + \eta \partial \left( \frac{m}{s'} \right) + \zeta \partial \left( \frac{n}{s'} \right) \right\} \quad (8)$$

Nimmt man den Anfang des Bogens  $s$  zum Anfang der  $xyz$ , die Tangente, Haupt- und Binormale dieses Anfangs bzhw. zu den Axen der  $x$ ,  $y$  und  $z$ , und entwickelt die Coordinaten nach Potenzen von  $s$  bis zur vierten, so erhält man, wenn der Kürze wegen die Anfangswerte von  $\vartheta'$  und  $s'$  und die der Derivationen mit  $\kappa$ ,  $\kappa'$  und  $\mu$ ,  $\mu'$ ,  $\mu''$  bezeichnet werden:

$$x = s - \frac{s^3}{6\mu^2} + \frac{\mu's^4}{8\mu^4} \\ y = \frac{s^2}{2\mu} - \frac{\mu's^3}{6\mu^3} - \left( 1 + \kappa^2 + \frac{\mu''}{\mu} - \frac{3\mu'^2}{\mu^2} \right) \frac{s^4}{24\mu^3} \\ z = \frac{\kappa s^3}{6\mu^2} + \left( \kappa' - \frac{3\kappa\mu'}{\mu} \right) \frac{s^4}{24\mu^3}$$

und nach zweimaliger Differentiation erst:

$$f = 1 - \frac{s^2}{2\mu^2} + \frac{\mu's^3}{2\mu^4} \\ g = \frac{s}{\mu} - \frac{\mu's^2}{2\mu^3} - \left( 1 + \kappa^2 + \frac{\mu''}{\mu} - \frac{3\mu'^2}{\mu^2} \right) \frac{s^3}{6\mu^3} \\ h = \frac{\kappa s^2}{2\mu^2} + \left( \kappa' - \frac{3\kappa\mu'}{\mu} \right) \frac{s^3}{6\mu^3}$$

dann :

$$\frac{f'}{s'} = -\frac{s}{\mu^2} + \frac{3\mu's^2}{2\mu^4} \\ \frac{g'}{s'} = \frac{1}{\mu} - \frac{\mu's}{\mu^3} - \left( 1 + \kappa^2 + \frac{\mu''}{\mu} - \frac{3\mu'^2}{\mu^2} \right) \frac{s^2}{2\mu^3}$$

$$\frac{h'}{s'} = \frac{\kappa s}{\mu^2} + \left( \kappa' - \frac{3\kappa\mu'}{\mu} \right) \frac{s^2}{2\mu^3}$$

woraus durch Determinantenbildung:

$$\frac{l}{s'} = \frac{\kappa s^2}{2\mu^3} + \left( \frac{\kappa'}{3} - \frac{\kappa\mu'}{\mu} \right) \frac{s^3}{\mu^4}$$

$$\frac{m}{s'} = -\frac{\kappa s}{\mu^2} - \left( \kappa' - \frac{3\kappa\mu'}{\mu} \right) \frac{s^2}{2\mu^3}$$

$$\frac{n}{s'} = \frac{1}{\mu} - \frac{\mu' s}{\mu^3} - \left( \kappa^2 + \frac{\mu''}{\mu} - \frac{3\mu'^2}{\mu^2} \right) \frac{s^2}{2\mu^3}$$

Dies eingeführt giebt bis zu erster Potenz von  $s$ :

$$\xi \partial \left( \frac{l}{s'} \right) + \eta \partial \left( \frac{m}{s'} \right) + \zeta \partial \left( \frac{n}{s'} \right) = -p(D + Es) \partial s$$

$$D = \frac{b\kappa}{\mu^2} + \frac{c\mu'}{\mu^3}$$

$$E = -\frac{a\kappa}{\mu^3} + \frac{b_1\kappa}{\mu^2} + \frac{b}{\mu^3} \left( \kappa' - \frac{3\kappa\mu'}{\mu} \right) + \frac{c_1\mu'}{\mu^3} + \frac{c}{\mu^3} \left( \kappa^2 + \frac{\mu''}{\mu} + \frac{3\mu'^2}{\mu^2} \right)$$

und nach Gl. (8) erhält man:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 - \vartheta &= \int_0^1 p(D + Es) \partial s = e^9 \int_0^1 s^4 (1-s)^4 (D + Ees) \partial s \\ &= e^9 \left\{ D \frac{(\Gamma 5)^2}{\Gamma 10} + Ee \frac{\Gamma 5 \Gamma 6}{\Gamma 11} \right\} = \frac{e^9}{630} (D + \frac{1}{2} Ee) \end{aligned}$$

Die Differenz  $\vartheta_1 - \vartheta$  bleibt offenbar ungeändert, wenn  $s$  über das deformirte Intervall hinaus variirt. Sind also die Parallelen der Urcurve geschlossen, so drückt die gefundene Unendlichkleine 9. Ordnung den Bogenabstand des Endes der Parallele vom Anfang nach Deformation für die Einheit des Radius aus, sind jene es nicht, den Zuwachs des Bogenabstands.











Alle Geraden, welche die Curve in einem unendlich entfernten Punkte schneiden, sind unter einander parallel. Die Richtung dieser Geraden erhält man, wenn man die Gleichung der Curve durch Polarcordinaten ausgedrückt, nach fallenden Potenzen von  $r$  ordnet, darauf durch die höchste Potenz durchdividirt und hierauf  $r = \infty$  setzt.

Führt man diese Manipulationen aus, so erhält man zur Bestimmung von  $\varphi$  die Gleichung

$$2\eta \cos^3 \varphi + (\xi - 2\xi) \sin^3 \varphi + (\xi - 2\xi) \cos^2 \varphi \sin \varphi + 2\eta \sin^2 \varphi \cos \varphi = 0$$

oder auch

$$(\xi - 2\xi) \operatorname{tg}^3 \varphi + (\xi - 2\xi) \operatorname{tg} \varphi + 2\eta \operatorname{tg}^2 \varphi + 2\eta = 0 \quad \text{oder}$$

$$16) \quad \operatorname{tg}^3 \varphi + \frac{2\eta}{\xi - 2\xi} \operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg} \varphi + \frac{2\eta}{(\xi - 2\xi)} = 0$$

oder  $\operatorname{tg} \varphi = z$  und  $\frac{2\eta}{\xi - 2\xi}$  der Kürze halber durch  $G$  bezeichnet

$$z^3 + G \cdot z^2 + z + G = 0.$$

Dieser Gleichung genügt der Wert  $-G$  für  $z$ .

Dividirt man, um die obigen Werte zu erhalten, die Gleichung durch  $z + G$ , so erhält man die Gleichung

$$z^2 + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad z = \pm i.$$

Also hat die vorliegende Gleichung nur einen unendlich entfernten Punkt, die übrigen zwei sind imaginär. Die Richtung der Geraden, welche die Curve in dem unendlich entfernten Punkte schneiden, ist bestimmt durch

$$17) \quad z = -G \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\eta}{\xi - 2\xi}.$$

Führt man die Werte aus Gleichung 15) ein, so erhält man

$$\varphi = 95^\circ 42' 38''.$$

Um die Gleichung der Tangente im unendlich entfernten Punkte der Curve zu bestimmen, ist erst die allgemeine Gleichung der Tangente aufzustellen.

Die Gleichung der Tangente hat die Form

$$Y - y = \frac{dy}{dx} (X - x)$$

wo  $XY$  die laufenden Coordinaten der Tangente und  $xy$  die Coordinaten der vorliegenden Curve sind.





















$$\text{VI)} \quad \varphi(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_n),$$

so ist

$$\text{VII)} \quad \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \frac{f(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)} \cdot \frac{1}{\xi - \xi_1} + \frac{f(\xi_2)}{\varphi'(\xi_2)} \cdot \frac{1}{\xi - \xi_2} + \dots + \frac{f(\xi_n)}{\varphi'(\xi_n)} \cdot \frac{1}{\xi - \xi_n} + V,$$

wo  $V$  eine für alle betrachteten Argumente convergente, nach einfachen Potenzen von  $\xi$  fortschreitende Reihe ist.

Entwickelt man jeden der Partialbrüche nach fallenden Potenzen von  $\xi$ , also z. B.

$$\frac{f(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)} \cdot \frac{1}{\xi - \xi_1} = \frac{f(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)} [\xi^{-1} + \xi_1 \xi^{-2} + \xi_1^2 \xi^{-3} + \dots],$$

und nennt die Summe dieser Partialbrüche  $G$ , so ist

$$\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = V + G,$$

und es enthält  $V$  die Glieder mit positiven,  $U$  die Glieder mit negativen Exponenten.

Dieselbe Entwicklung erhält man auch, indem man  $\frac{1}{\varphi(\xi)}$  nach fallenden Potenzen entwickelt und diese Entwicklung mit  $f(\xi)$  multiplicirt. Hierdurch kann man  $V$  darstellen. Setzt man

$$\text{VIII)} \quad \frac{1}{\varphi(\xi)} = A_1 \xi^{-k} + A_2 \xi^{-(k+1)} + A_3 \xi^{-(k+2)} + \dots,$$

eine Reihe, die bekanntlich recurrirend ist, so dass die Coefficienten sich leicht bestimmen lassen, so ergibt sich in der angedeuteten Weise

$$\text{IX)} \quad V = \alpha_{n+1} A_1 + \alpha_{n+2} (A_1 \xi + A_2) + \alpha_{n+3} (A_1 \xi^2 + A_2 \xi + A_3) + \dots \\ + \alpha_{2n} (A_1 \xi^{n-1} + A_2 \xi^{n-2} \dots A_n) + \dots$$

Man bemerkt dass, wenn die gegebene Function eine endliche Reihe ist, diese Entwicklung abbricht, und zwar, wenn die gegebene Function  $2n$  Glieder hat, mit dem zuletzt hingeschriebenen Gliede.

Nun ist

$$J = \sum_1^n \frac{f(\xi_i)}{\varphi'(\xi_i)} \int_0^1 \frac{\xi^{\epsilon-1} \varphi(\xi)}{\xi - \xi_i} d\xi + \int_0^1 V \xi^{\epsilon-1} \varphi(\xi) d\xi$$

also, da

$$f(\xi_i) = \frac{F(x_i)}{h^{\mu-1} \xi^{\epsilon-\frac{1}{\sigma}}}$$



$$\int_0^1 \xi^{\varepsilon-1} \varphi(\xi) d\xi = 0, \quad \int_0^1 \xi^{\varepsilon} \varphi(\xi) d\xi = 0,$$

$$\int_0^1 \xi^{\varepsilon+1} \varphi(\xi) d\xi = 0 \dots \int_0^1 \xi^{\varepsilon+n-2} \varphi(\xi) d\xi = 0$$

wird, oder wenn man setzt

$$\text{XIII)} \quad \xi^{\varepsilon-1} \varphi(\xi) = \psi(\xi),$$

dass

$$\text{XIV)} \quad \int_0^1 \psi(\xi) d\xi = 0, \quad \int_0^1 \xi \psi(\xi) d\xi = 0,$$

$$\int_0^1 \xi^2 \psi(\xi) d\xi = 0 \dots \int_0^1 \xi^{n-1} \psi(\xi) d\xi = 0$$

Nun hat Jacobi durch wiederholte partielle Integration eine Formel gewonnen, welche für den vorliegenden Zweck so geschrieben werden kann:

$$\text{XV)} \quad \int_0^{\xi} u v d\xi = u \int_0^{\xi} v d\xi - u' \int_0^{\xi} v d\xi^2 + u'' \int_0^{\xi} v d\xi^3 - + \dots$$

$$+ (-1)^m u^{(m)} \int_0^{\xi} v d\xi^{m+1} + (-1)^{m+1} \int_0^{\xi} u^{(m+1)} \int_0^{\xi} v d\xi^{m+1} d\xi,$$

wo  $u$  und  $v$  Functionen von  $\xi$  sind und das Zeichen  $\int_0^{\xi} v d\xi^k$  das  $k$ fache Integral der Function  $v$  zwischen 0 und  $\xi$  nach  $d\xi$  bedeutet; so dass z. B.

$$\int_0^{\xi} v d\xi^3 = \int_0^{\xi} \int_0^{\xi} \int_0^{\xi} v d\xi^3.$$

Setzt man in XV)

$$u = \xi^m, \quad v = \psi(\xi),$$

so erhält man bei ganzzahligem  $m$

$$\int_0^{\xi} \xi^m \psi(\xi) d\xi = \xi^m \int_0^{\xi} \psi(\xi) d\xi - m \xi^{m-1} \int_0^{\xi} \psi(\xi) d\xi^2 + m(m-1) \int_0^{\xi} \psi(\xi) d\xi^3 - + \dots$$

$$+ (-1)^m m! \int_0^{\xi} \psi(\xi) d\xi^{m+1}.$$









$$\text{XIX)} \quad \Delta = \frac{h^\mu}{\delta} \cdot \frac{1}{\binom{\varepsilon-1+n}{n}} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{i=1, 2, 3, \dots}^{\alpha_{2n+i}} \left[ \frac{\binom{n+i-1}{n}}{\binom{\varepsilon-1+2n+i}{n+1}} A_1 \right. \\ \left. + \frac{\binom{n+i-2}{n}}{\binom{\varepsilon-1+2n+i-1}{n+1}} A_2 + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{\binom{\varepsilon-1+2n+1}{n+1}} A_i \right]$$

oder

$$\text{XIX')} \quad \Delta = \frac{h^{\mu+2nd}}{\delta} \cdot \frac{1}{\binom{\varepsilon-1+n}{n}} \cdot \frac{1}{n+1} \sum \alpha_{2n+i} h^{(i-1)\delta} \left[ \frac{\binom{n+i-1}{n}}{\binom{\varepsilon-1+2n+i}{n+1}} A_1 \right. \\ \left. + \frac{\binom{n+i-2}{n}}{\binom{\varepsilon-1+2n+i-1}{n+1}} A_2 + \dots \right]$$

Diese Summe erstreckt sich auf soviel Glieder, als in der Function  $n$  mit Weglassung der  $2n$  ersten auf einander folgenden enthalten sind.

Die Grössen  $A$  sind, wie bereits bemerkt wurde, die Coefficienten der recurrirenden Reihe, welche man erhält, wenn man  $\frac{1}{\varphi(\xi)}$  nach fallenden Potenzen von  $\xi$  entwickelt. Es ergibt sich also nach bekannten Methoden:

$$\text{XX)} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = 1 \\ A_2 - \frac{\varepsilon+n-1}{\varepsilon+2n-1} \binom{n}{1} A_1 = 0 \\ A_3 - \frac{\varepsilon+n-1}{\varepsilon+2n-1} \binom{n}{1} A_2 + \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2)}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)} \binom{n}{2} A_1 = 0 \\ \vdots \\ A_k - \frac{\varepsilon+n-1}{\varepsilon+2n-1} \binom{n}{1} A_{k-1} + \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2)}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)} \binom{n}{2} A_{k-2} - \dots \\ \quad + (-1)^n \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2) \dots \varepsilon}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2) \dots (\varepsilon+n)} \binom{n}{n} A_{k-n} = 0 \end{array} \right.$$

Die hieraus zu berechnenden Werte sind in XIX) einzusetzen um den Wert von  $\Delta$  vollständig durch die gegebenen Grössen auszudrücken.



XXI)

$$\begin{aligned}
c_1 x_1^{\mu-1} &+ c_2 x_2^{\mu-1} + \dots + c_n x_n^{\mu-1} &= \frac{h^{\mu-1}}{\mu} \\
c_1 x_1^{\mu-1+\delta} &+ c_2 x_2^{\mu-1+\delta} + \dots + c_n x_n^{\mu-1+\delta} &= \frac{h^{\mu-1+\delta}}{\mu+\delta} \\
c_1 x_1^{\mu-1+2\delta} &+ c_2 x_2^{\mu-1+2\delta} + \dots + c_n x_n^{\mu-1+2\delta} &= \frac{h^{\mu-1+2\delta}}{\mu+2\delta} \\
\vdots & & \\
c_1 x_1^{\mu-1+(2n-1)\delta} &+ c_2 x_2^{\mu-1+(2n-1)\delta} + \dots + c_n x_n^{\mu-1+(2n-1)\delta} &= \frac{h^{\mu-1+2n\delta}}{\mu+2n\delta}
\end{aligned}$$

Wir setzen wieder, wie oben,

$$x_i = h_i \xi_i^{\frac{1}{\delta}}, \quad \frac{\mu}{\delta} = \varepsilon,$$

und ausserdem

$$c_i x_i^{\mu-1} = \frac{h^{\mu-1} \gamma_i}{\delta}.$$

Dann gehen die Gleichungen XX) über in

$$\text{XXII)} \quad \left\{ \begin{aligned}
\gamma_1 &+ \gamma_2 + \dots + \gamma_n &= \frac{1}{\varepsilon} \\
\gamma_1 \xi_1 &+ \gamma_2 \xi_2 + \dots + \gamma_n \xi_n &= \frac{1}{\varepsilon+1} \\
\gamma_1 \xi_1^2 &+ \gamma_2 \xi_2^2 + \dots + \gamma_n \xi_n^2 &= \frac{1}{\varepsilon+2} \\
\vdots & & \\
\gamma_1 \xi_1^{2n-1} &+ \gamma_2 \xi_2^{2n-1} + \dots + \gamma_n \xi_n^{2n-1} &= \frac{1}{\varepsilon+2n-1}
\end{aligned} \right.$$

Dies sind  $2n$  Gleichungen zur Bestimmung der  $2n$  Unbekannten  $\gamma_i$  und  $\xi_i$ , aus denen sich dann auch die  $c_i$  und  $x_i$  bestimmen lassen.

Die Elimination kann man auf folgende Weise bewerkstelligen. Man eliminirt aus je  $(n+1)$  auf einander folgenden der Gleichungen XXII) die  $\gamma_i$ ; dadurch erhält man, da kein  $\xi_i$  Null sein kann, die  $n$  Gleichungen

$$\text{XXIII)} \quad \left| \begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{\varepsilon+k} \\
\xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_n & \frac{1}{\varepsilon+k+1} \\
\xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \dots & \xi_n^2 & \frac{1}{\varepsilon+k+2} \\
\vdots & & & & & \\
\xi_1^n & \xi_2^n & \xi_3^n & \dots & \xi_n^n & \frac{1}{\varepsilon+k+n-1}
\end{array} \right| = 0 \quad (k=0, 1, 2, 3 \dots n-1)$$

Die Gleichung  $n$ ten Grades, deren Wurzeln  $\xi_1$  bis  $\xi_n$  sind, kann geschrieben werden

$$\text{XXIV)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_n & \xi \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \dots & \xi_n^2 & \xi^2 \\ \vdots & & & & & \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \xi_3^n & \dots & \xi_n^n & \xi^n \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man die Determinanten auf der linken Seite der Gleichungen XXIII) und XXIV) nach den Elementen der letzten Spalte und nennt die Unterdeterminanten  $R_0 R_1 \dots R_n$ , so kommt

$$\begin{aligned} 1 R_0 + \xi R_1 + \xi^2 R_2 + \dots + \xi^n R_n &= 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} R_0 + \frac{1}{\varepsilon+1} R_1 + \frac{1}{\varepsilon+2} R_2 + \dots + \frac{1}{\varepsilon+n} R_n &= 0 \\ \frac{1}{\varepsilon+1} R_0 + \frac{1}{\varepsilon+2} R_1 + \frac{1}{\varepsilon+3} R_2 + \dots + \frac{1}{\varepsilon+n+1} R_n &= 0 \\ \vdots & \\ \frac{1}{\varepsilon+n-1} R_0 + \frac{1}{\varepsilon+n} R_1 + \frac{1}{\varepsilon+n+1} R_2 + \dots + \frac{1}{\varepsilon+2n-1} R_n &= 0 \end{aligned}$$

woraus durch Elimination der  $R$  folgt

$$\text{XXV)} \quad P(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \dots & \xi^n \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon+1} & \frac{1}{\varepsilon+2} & \dots & \frac{1}{\varepsilon+n} \\ \frac{1}{\varepsilon+1} & \frac{1}{\varepsilon+2} & \frac{1}{\varepsilon+3} & \dots & \frac{1}{\varepsilon+n+1} \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{\varepsilon+n-1} & \frac{1}{\varepsilon+n} & \frac{1}{\varepsilon+n+1} & \dots & \frac{1}{\varepsilon+2n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt

$$\text{XXV')} \quad P(\xi) = p_0 \xi^n + p_1 \xi^{n-1} + p_2 \xi^{n-2} + \dots + p_{n-1} \xi + p_n = 0.$$

Dies ist eine Gleichung  $n$ ten Grades zur Bestimmung der  $n$  Werte  $\xi_1 \dots \xi_n$ .

Zur Bestimmung der  $\gamma_i$  kann man dann irgend  $n$  der Gleichungen XXII) benutzen, die sämtlich in Bezug auf die  $\gamma_i$  linear sind.

Wenngleich diese Elimination schon sehr kurz ist, so kann man noch schneller zum Ziele kommen. Durch Benutzung der Theorie

der recurrirenden Reihen, welche ja auch in der Jacobi'schen Entwicklung angewendet werden. Sind nämlich  $\xi_1 \dots \xi_n$   $n$  verschiedene Werte, welche der Gleichung

$$\text{XXV')} \quad P(\xi) = p_0 \xi^n + p_1 \xi^{n-1} + p_2 \xi^{n-2} \dots p_n = 0$$

genügen, und entwickelt man die Summe

$$\sum_1^n \frac{\gamma_i}{1 - \frac{\xi_i}{\xi}}$$

nach fallenden Potenzen von  $\xi$ , indem man jedes Glied der Summe entwickelt und dann die Glieder addirt, so erhält man eine Reihe

$$B_0 + B_1 \xi^{-1} + B_2 \xi^{-2} \dots$$

und es ist allgemein

$$\text{XXVI)} \quad B_k = \gamma_1 \xi_1^k + \gamma_2 \xi_2^k + \dots + \gamma_n \xi_n^k$$

Bringt man aber vor der Entwicklung den Ausdruck  $\sum_1^n \frac{\gamma_i}{1 - \frac{\xi_i}{\xi}}$  auf

einen Nenner, welcher gleich  $\frac{P(\xi)}{p_0 \xi^n}$  wird, und entwickelt dann nach fallenden Potenzen von  $\xi$ , so erhält man dieselbe Reihe, welche recurrirend ist, und deren Coefficienten folgendem Gesetze unterworfen sind

$$\text{XXVII)} \quad p_0 B_k + p_1 B_{k-1} + p_2 B_{k-2} + \dots + p_n B_{k-n} = 0$$

wo  $B_{-1} B_{-2} \dots$  gleich Null sind.

Setzen wir nun für  $\xi$  und  $\gamma$  die Werte aus den Bedingungs-  
gleichungen XXII) ein, so folgt aus XXVI)

$$B_0 = \frac{1}{\varepsilon}, \quad B_1 = \frac{1}{\varepsilon + 1} \dots B_{2n-1} = \frac{1}{\varepsilon + 2n - 1}$$

also geben die Gleichungen XXVII), wenn man darin der Reihe nach  $k = n, n+1, \dots, 2n-1$  setzt,

$$\text{XXVIII)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{p_0}{\varepsilon + n} + \frac{p_1}{\varepsilon + n - 1} + \frac{p_2}{\varepsilon + n - 2} \dots \frac{p_n}{\varepsilon} = 0 \\ \frac{p_0}{\varepsilon + n + 1} + \frac{p_1}{\varepsilon + n} + \frac{p_2}{\varepsilon + n - 1} \dots \frac{p_n}{\varepsilon + 1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{p_0}{\varepsilon + 2n - 1} + \frac{p_1}{\varepsilon + 2n - 2} + \frac{p_2}{\varepsilon + 2n - 3} \dots \frac{p_n}{\varepsilon + n - 1} = 0 \end{array} \right.$$



$$\int_0^1 \xi^{\epsilon-1} P(\xi) d\xi = 0, \quad \int_0^1 \xi^{\epsilon-1} (\xi - \xi_1) P(\xi) d\xi = 0,$$

$$\int_0^1 \xi^{\epsilon-1} (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) P(\xi) d\xi = 0, \dots$$

$$\dots \int_0^1 \xi^{\epsilon-1} (\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_{n-1}) P(\xi) d\xi = 0$$

sein muss, dass also auch, wenn man setzt  $\psi_1(\xi) = \xi^{\epsilon-1} P(\xi)$ ,

$$\int_0^1 \psi_1(\xi) d\xi \int_0^1 \xi \psi_1(\xi) d\xi \dots \int_0^1 \xi^{n-1} \psi_1(\xi) d\xi = 0.$$

Dies sind dieselben Bedingungen für  $P(\xi)$ , wie oben XIV) für  $\psi(\xi)$  aufgestellt sind, also können sich  $\psi(\xi)$  und  $\psi_1(\xi)$  nur durch einen constanten Factor unterscheiden.

Man erkennt durch die Vergleichung der verschiedenen Formen, in die die Gleichung gebracht werden kann, die bemerkenswerte Beziehung, dass die Determinante  $P(\xi)$  (XXV) bis auf einen leicht bestimmbaren constanten Factor identisch ist mit

$$\frac{\xi^{1-\epsilon} d^n [\xi^{\epsilon-1} + n(\xi-1)^n]}{d\xi^n} \dots$$

Wir wollen nun auch den Fehler  $\Delta$  in Betracht ziehen, den man begeht, wenn man die Formel der mechanischen Quadratur auf einen Ausdruck anwendet, der nicht nur die  $2n$  ersten Glieder enthält.

Wir setzen die Summe dieser Glieder vom  $(2n+1)$ ten an, gleich  $R(x)$ , also

$$\text{XXX)} \quad a_{2n+1} x^{\mu-1+2n\delta} + a_{2n+2} x^{\mu-1+(2n+1)\delta} + \dots = R(x),$$

so dass

$$F(x) = \Phi(x) + R(x) \quad \text{und}$$

$$\int_0^h F(x) dx = \int_0^h \Phi(x) dx + \int_0^h R(x) dx.$$

Das erste der Integrale rechts kann nach der Formel berechnet werden, also

$$\int_0^h \Phi(x) dx = h [c_1 \Phi(x_1) + c_2 \Phi(x_2) \dots c_n \Phi(x_n)]$$

$$= h [c_1 F(x_1) + c_2 F(x_2) \dots c_n F(x_n)] - h [c_1 R(x_1) + c_2 R(x_2) \dots c_n R(x_n)]$$



Setzt man also

$$\int_0^h F(x) dx = h \sum c_i F(x_i) + \Delta,$$

so ist

$$\Delta = \int_0^h R(x) dx - h \sum c_i R(x_i)$$

der Fehler, den man durch allgemeine Anwendung der besprochenen Formel macht.

Setzt man für  $R(x)$  überall seinen Wert aus XXX) ein, so kommt

$$\begin{aligned} \Delta = a_{2n+1} & \left[ \frac{h^{\mu+2n\delta}}{\mu+2n\delta} - h \sum c_i x_i^{\mu-1+2n\delta} \right] \\ & + a_{2n+2} \left[ \frac{h^{\mu+(2n+1)\delta}}{\mu+(2n+1)\delta} - h \sum c_i x_i^{\mu-1+(2n+1)\delta} \right] + \dots \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} = a_{2n+1} \frac{h^{\mu+2n\delta}}{\delta} & \left[ \frac{1}{\varepsilon+2n} - \sum \gamma_i \xi_i^{2n} \right] \\ & + a_{2n+2} \frac{h^{\mu+(2n+1)\delta}}{\delta} \left[ \frac{1}{\varepsilon+2n+1} - \sum \gamma_i \xi_i^{2n+1} \right] + \dots \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf die Formel XXVI)

$$\begin{aligned} \text{XXXI)} \quad \Delta = a_{2n+1} \frac{h^{\mu+2n\delta}}{\delta} & \left[ \frac{1}{\varepsilon+2n} - B_{2n} \right] \\ & + a_{2n+2} \frac{h^{\mu+(2n+1)\delta}}{\delta} \left[ \frac{1}{\varepsilon+2n+1} - B_{2n+1} \right] + \dots \end{aligned}$$

oder

XXXI')

$$\Delta = \frac{h^\mu}{\delta} \left[ a_{2n+1} \left( \frac{1}{\varepsilon+2n} - B_{2n} \right) + a_{2n+2} \left( \frac{1}{\varepsilon+2n+1} - B_{2n+1} \right) + \dots \right]$$

Die Werte bis  $B_{2n-1}$  sind oben bereits aufgeführt, die folgenden können daraus durch die Recursionsformel XXVII) berechnet werden.

Da  $P(\xi)$  (XXV) und  $\varphi(\xi)$  (XVIII') sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden, auf welchen es nicht ankommt, so ist XVII) gleichbedeutend mit der letzten Gleichung XX), und wir erhalten

XXXII)

$$\begin{aligned}
B_{2n} &= \frac{\varepsilon+n-1}{\varepsilon+2n-1} \binom{n}{1} \frac{1}{\varepsilon+2n-1} + \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2)}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)} \binom{n}{2} \frac{1}{\varepsilon+2n-2} - + \dots \\
&\quad + (-1)^n \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2) \dots \varepsilon}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2) \dots (\varepsilon+n)} \binom{n}{n} \frac{1}{\varepsilon+n} = 0 \\
B_{2n+1} &= \frac{\varepsilon+n-1}{\varepsilon+2n-1} \binom{n}{1} B_{2n} + \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-1)}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)} \binom{n}{2} \frac{1}{\varepsilon+2n-1} - + \dots \\
&\quad + (-1)^n \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2) \dots \varepsilon}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2) \dots \varepsilon+n} \binom{n}{n} \frac{1}{\varepsilon+n+1} = 0
\end{aligned}$$

u. s. f.

Das erste Glied des Fehlers  $\mathcal{A}$  wird demnach

$$\begin{aligned}
\text{XXXIII)} \quad a_{2n+1} &= \frac{h^{\mu+2n\delta}}{\delta} \left( \frac{1}{\varepsilon+2n} - \frac{\varepsilon+n-1}{\varepsilon+2n-1} \binom{n}{1} \frac{1}{(\varepsilon+2n-1)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2)}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)} \binom{n}{2} \frac{1}{(\varepsilon+2n-2)^2} - + \dots \right)
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist, wenn  $n$  eine grössere Zahl ist, d. h. wenn man eine grössere Gliederzahl bei der Berechnung berücksichtigt hat, nicht so bequem, wie der Jacobi'sche; da man aber in der Praxis die Formel nur anwenden wird, wenn eine kleinere Gliederzahl genügt, so ist der Unterschied in der Form nicht von allzugrossem Belang.

Bemerkung über den Fall  $\varepsilon = 1$ .

Der Fall  $\varepsilon = 1$ , welcher bei der Jacobi-Gauss'schen Formel und allgemeiner immer dann eintritt, wenn  $\mu = \delta$  ist, z. B. auch wenn  $f(x)$  eine ungerade Function ist, die mit einem Gliede der ersten Potenz beginnt, ist in gewisser Hinsicht besonders ausgezeichnet. Die Gleichung XIII) wird nach Fortlassung eines constanten Factors

$$\text{XXXIV)} \quad \frac{d^n \xi^n (\xi-1)^n}{d\xi^n} = 0.$$

Setzt man  $\xi = \frac{\eta+1}{2}$ , so geht dieselbe nach Multiplication mit  $2^n$  über in

$$\frac{d^n (\eta^2 - 1)^n}{d\eta^n} = 0,$$

oder wenn man entwickelt und  $\eta^n$  von seinem Coefficienten befreit

XXXV)

$$\eta^n - \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} \binom{n}{1} \eta^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)} \eta^{n-4} - + \dots = 0.$$



Es verdient auch bemerkt zu werden, dass wenn man in dem Falle  $\varepsilon = 1$ , die Substitution  $\xi = \frac{\eta+1}{2}$  vor Ausführung der übrigen Entwicklungen macht, man durch ein dem oben angewendetes vollkommen analoges Verfahren auf folgende Gleichungen zur Bestimmung von  $\eta$  geführt wird.

Für gerades  $n$

$$\text{XXXVIII)} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \eta^2 & \eta^4 & \dots & \eta^n \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \dots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+3} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix} = 0$$

Für ungerades  $n$

$$\text{XXXIX)} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \eta & \eta^3 & \eta^5 & \dots & \eta^n \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix} = 0$$

woraus folgt, dass der Ausdruck  $\frac{d^n(\eta^2-1)^n}{d\eta^n}$ , jenachdem  $n$  gerade oder ungerade ist, der linken Seite der Gleichung XXXVIII) oder XXXIX) bis auf einen leicht bestimmbar constanten Factor gleich wird, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass die Determinante

$$\text{XL)} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \dots & \xi^n \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n} \end{vmatrix}$$



$$\xi^2 - 2 \cdot \frac{12}{14} \xi + \frac{12}{14} \cdot \frac{11}{13} = 0$$

$$\xi = \frac{6}{7} \mp \sqrt{\frac{36}{49} - \frac{66}{91}}$$

Dann ist

$$x_1 = h\xi_1; \quad x_2 = h\xi_2$$

und zur Bestimmung von  $c_1$  und  $c_2$  kann man benutzen die Gleichungen

$$c_1 x_1^{10} + c_2 x_2^{10} = \frac{h^{10}}{11}$$

$$c_1 x_1^{11} + c_2 x_2^{11} = \frac{h^{11}}{12}$$

Dann ist

$$\int_0^h F(x) dx = h[c_1 F(x_1) + c_2 F(x_2)]$$

Derselbe ist genau, wenn die Reihe nach vier Gliedern abbricht. Nach der Jacobi-Gauss'schen Methode würde man sieben Functionswerte und die Auflösung einer Gleichung siebenten Grades für  $\xi$ , die sich auf eine Gleichung dritten Grades für  $\eta^2$  reduciren würde, brauchen, um im gleichen Falle das Integral genau zu erhalten, weil in dieser Methode der Fortfall der niederen Potenzen gar nicht berücksichtigt werden kann.

Noch bedeutender wird der Vorteil, wenn noch mehr Glieder vom Anfang an verschwinden.

Als ein zweites wichtiges Beispiel, wo die verallgemeinerte Methode zu einer wichtigen Vereinfachung führt, führe ich den Fall an, wo die zu integrierende Function eine ungerade Function ist, selbst wenn sie mit der niedrigsten Potenz, also der ersten beginnt.

Sei also

$$F(x) = a_1 x + a_2 x^3 + a_3 x^5 + a_4 x^7 + \dots + a_{10} x^{19} + \dots,$$

hier ist

$$\mu = 2; \quad \delta = 2; \quad \varepsilon = 1;$$

also die Gleichung zur Bestimmung von  $\xi$  wird wie oben XXXIV) oder  $\mathcal{A} = 0$  (XL) und geht durch die Substitution  $\xi = \frac{\eta + 1}{2}$  in die Gleichung XXXV) über.

Setzt man  $n = 5$ , so erhält man die Gleichung XXXVII) und daraus die 5 Werte für  $\eta$  und  $\xi$ , wie dort angegeben ist. Dann ist

$$x_i = h\sqrt{\xi_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$



## IX.

## Miscellen.

## 1.

**Beitrag zu den Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades mit rationalen Wurzeln.**

Im 64. Teil, 3. Heft pg. 299. des „Archivs“ waren die Wurzeln einer vollständigen Gleichung 4. Grades von der Form

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x_1 \text{ u. } x_2 = -\frac{a}{4} + \varphi \pm \sqrt{z + \frac{a^2 - 4b}{8} - \frac{a^3 - 4ab + 8c}{32\varphi}}$$

$$x_3 \text{ u. } x_4 = -\frac{a}{4} - \varphi \pm \sqrt{z + \frac{a^2 - 4b}{8} + \frac{a^3 - 4ab + 8c}{32\varphi}}$$

gefunden, wenn man unter  $z$  einen Wurzelwert der kubischen Resolvente der Gleichung 4. Grades und unter  $\varphi = \sqrt[3]{\frac{a^2}{16}}$  versteht.

1. Wenn eine Wurzel  $x_1$  einer Gleichung 4. Grades rational ist, und wenn ein Wurzelwert der kubischen Resolvente dieser Gleichung rational ist, so ist sowohl  $\varphi$ , d. h.

$$\sqrt[3]{\frac{a^2}{16}} - z \text{ als auch } \sqrt{z + \frac{a^2 - 4b}{8} + \frac{a^3 - 4ab + 8c}{32\varphi}}$$

und damit auch ein zweiter Wurzelwert der Gleichung 4. Grades rational.





Auflösung.

Man setze

$$\text{I. } x = -\frac{a}{2} \pm m \quad \text{oder}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = m^2$$

Hieraus ergibt sich die gesuchte Form

$$\text{II. } x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - m^2 = 0 \quad x_1 = -\frac{a}{2} + m$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - m$$

$a$  und  $m$  sind beliebige rationale Zahlen.

Setzt man in II.  $a = 0$ , so erhält die Gleichung 2. Grades die Form

$$x^2 - m^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$(x + m)(x - m) = 0 \quad \text{also } x_1 = -m \\ \text{und } x_2 = +m.$$

3. Welche Form hat eine vollständige Gleichung 3. Grades, damit eine Wurzel derselben, durch die Cardanische Formel berechnet, 2 rationale dritte Wurzeln liefert?

Auflösung.

Man setze

$$\text{I. } x = -\frac{a}{3} + m + n \quad \text{oder}$$

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 = (m + n)^3$$

Hieraus ergibt sich die gesuchte Form der Gleichung

$$\text{II. } x^3 + ax^2 + x\left(\frac{a^2}{3} - 3mn\right) - m^3 - n^3 + \frac{a^3}{27} - amn = 0$$

Hierin ist

$$x_1 = -\frac{a}{3} + m + n$$

$$x_2 \text{ u. } x_3 = -\frac{a}{3} - \frac{m+n}{2} \pm \frac{m-n}{2}\sqrt{-3}$$

Vergleicht man die Gleichung II. mit einer vollständigen Gleichung 3. Grades von der Form

$$\text{III. } x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

so muss

$$a = a$$

$$b = \frac{a^2}{3} - 3mn$$

$$c = -m^3 - n^3 + \frac{a^3}{27} - amn$$

sein. Nach diesen letzten 3 Gleichungen lässt sich ja  $m$  und  $n$  aus  $a$ ,  $b$  und  $c$  berechnen, so dass

$$\text{IV. } m = \frac{1}{3} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2a^3 - 9ab + 27c) + \frac{1}{2}\sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 - 4(a^2 - 3b)^3}}$$

$$\text{V. } n = \frac{1}{3} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2a^3 - 9ab + 27c) - \frac{1}{2}\sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 - 4(a^2 - 3b)^3}}$$

Wenn in den Gleichungen I., II. und III.  $a = 0$  ist, so ist also

$$\text{I. } x = m + n$$

$$\text{II. } x^3 - 3mnx - m^3 - n^3 = 0$$

und

$$\text{III. } x^3 + bx + c = 0$$

somit auch

$$m = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + \frac{4b^3}{27}}}$$

$$n = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + \frac{4b^3}{27}}}$$

Die Wurzelwerte der Gleichung II. sind dann

$$x_1 = m + n$$

$$x_2 \text{ und } x_3 = -\frac{m+n}{2} \pm \frac{m-n}{2}\sqrt{-3}.$$

4. Welche Form muss eine vollständige Gleichung 3. Grades

$$\text{I. } x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

haben, damit dieselbe 3 reelle und mindestens 1 rationale Wurzel habe?

Auflösung.

Wenn die 3 Wurzeln der Gleichung 3. Grades reell sind, so ist

$$\text{II. } x_1 = -\frac{a}{3} + m + pi + m - pi$$

$m$  und  $a$  seien rationale Zahlen.

Vergleicht man die beiden Gleichungen II. und III., so muss sein

$$-\frac{a}{2} = 3\alpha$$

$$\frac{a^3 - 4c}{16} = 3\alpha^3 - 3mn$$

$$\frac{b^2}{64} = -m^3 - n^3 + \alpha^3 - 3\alpha mn$$

Hieraus folgt

$$a = -6\alpha$$

$$c = 12mn - 3\alpha^2$$

$$b = \pm 8 \sqrt{\alpha^3 - m^3 - n^3 - 3\alpha mn}.$$

Wurzeln der Gleichung I. sind nun

$$x_1 \text{ u. } x_2 = \sqrt{-z} \pm \sqrt{z - \frac{a}{2} - \frac{b}{4\sqrt{-z}}}$$

Substituiert man in diese Gleichung für  $a$  und  $b$  die vorhin ermittelten Werte und für  $z$  den Wert  $-\alpha + m + n$ , so erhält man

$$x_1 \text{ u. } x_2 = \sqrt{-z_1} \pm \sqrt{2\alpha + m + n \mp 2\sqrt{\frac{\alpha^3 - m^3 - n^3 - 3\alpha mn}{\alpha - m - n}}}$$

oder

$$x_1 \text{ u. } x_2 = \sqrt{-z_1} \pm \left[ \sqrt{\frac{2\alpha + m + n}{2} + \frac{m - n}{2}\sqrt{-3}} \right. \\ \left. \mp \sqrt{\frac{2\alpha + m + n}{2} - \frac{m - n}{2}\sqrt{-3}} \right]$$

$$x_3 \text{ u. } x_4 = -\sqrt{-z_1} \pm \left[ \sqrt{\frac{2\alpha + m + n}{2} + \frac{m - n}{2}\sqrt{-3}} \right. \\ \left. \pm \sqrt{\frac{2\alpha + m + n}{2} - \frac{m - n}{2}\sqrt{-3}} \right]$$

Weil in der Gleichung  $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$

$$b = \pm 8 \sqrt{\alpha^3 - m^3 - n^3 - 3\alpha mn},$$

so muss dann das obere Vorzeichen vor der Wurzel in der Klammer genommen werden, wenn  $b$  positiv ist; ist dagegen  $b$  negativ, so gilt das untere Vorzeichen.

Weil nun die Wurzelwerte der kubischen Resolvente der Gleichung 4. Grades



Form dieser Gleichung:

$$V. \quad x^4 - 2(2q^2 - 2\varphi^2 + p^2)x^2 \pm 8p(q^2 + \varphi^2)x + (4\varphi^2 + p^2)(p^2 - 4q^2) = 0$$

Substituiert man nun in die vorhin aufgestellten Systeme der Wurzeln der Gleichung 4. Grades die Werte

$$\sqrt{-x_1} = p; \quad \sqrt{-x_2} = q - \varphi i; \quad \sqrt{-x_3} = q + \varphi i,$$

so ist

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p + 2\varphi i \\ x_2 &= p - 2\varphi i \\ x_3 &= -p + 2q \\ x_4 &= -p - 2q \end{aligned} \right\} \quad \text{wenn in Gleichung V. } 8p(q^2 + \varphi^2) \text{ positiv} \\ \text{genommen,}$$

und

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p + 2q \\ x_2 &= p - 2q \\ x_3 &= -p + 2\varphi i \\ x_4 &= -p - 2\varphi i \end{aligned} \right\} \quad \text{wenn in Gleichung V. } 8p(q^2 + \varphi^2) \text{ negativ} \\ \text{genommen.}$$

Die kubische Resolvente der Gleichung V. hat die Form

$$\text{oder} \quad y^3 - (x_1 + x_2 + x_3)y^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)y - x_1x_2x_3 = 0$$

$$VI. \quad y^3 + (p^2 + 2q^2 - 2\varphi^2)y^2 + [2p^2(q^2 - \varphi^2) + (q^2 + \varphi^2)^2]y + p^2(q^2 + \varphi^2)^2 = 0$$

Hierin

$$\begin{aligned} y_1 &= -p^2 \\ y_2 &= -(q - \varphi i)^2 \\ y_3 &= -(q + \varphi i)^2 \end{aligned}$$

Beispiel.

Es sei  $q = 1$ ;  $\varphi = 1$ ;  $p = 1$ , so erhält man die Gleichung

$$x^4 - 2x^2 + 16x - 15 = 0$$

Für die Bestimmung der Wurzeln dieser Gleichung gilt System I.

$$x_1 = 1 + 2i; \quad x_2 = 1 - 2i; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = -3.$$

Die kubische Resolvente der Gleichung 4. Grades ist

$$y^3 + y^2 + 4y + 4 = 0; \quad y_1 = -1; \quad y_2 = 2i; \quad y_3 = -2i$$

In dieser Resolvente ist ein Wurzelwert  $y_1 = -\alpha + m + n$  rational.  $m$  und  $n$  sind aber, wie früher gezeigt, irrational. Für dieses Beispiel ist

$$\alpha = \frac{1}{3}; \quad m = \frac{1 + 4\sqrt{3}}{3}; \quad n = \frac{1 - 4\sqrt{3}}{3}$$



$$-\frac{a}{2} = 3\alpha$$

$$\frac{a^2 - 4c}{16} = 3(\alpha^2 - m^2 - 3q^2)$$

$$\frac{b^2}{64} = \alpha^3 - 3\alpha(m^2 + 3q^2) - 2(m^3 - 9mq^2)$$

Hieraus folgt

$$a = -6\alpha \quad \text{und} \quad b = \pm 8\sqrt{\alpha^3 - 3\alpha(m^2 + 3q^2) - 2(m^3 - 9mq^2)}$$

Weil nun für die Gleichung I.

$$x_1 \text{ und } x_2 = \sqrt{-s} \pm \sqrt{s - \frac{a}{2} - \frac{b}{4\sqrt{-s}}}$$

worin  $s_1 = -\alpha + 2m$  und  $a$  und  $b$  die obigen Werte haben, so erhält man

$$x_1 \text{ und } x_2 = \sqrt{-s_1} \pm (\sqrt{-s_2} \pm \sqrt{-s_3})$$

$$x_3 \text{ und } x_4 = -\sqrt{-s_1} \pm (\sqrt{-s_2} \pm \sqrt{-s_3})$$

und zwar

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-s_1} + \sqrt{-s_2} - \sqrt{-s_3} \\ x_2 &= \sqrt{-s_1} - \sqrt{-s_2} + \sqrt{-s_3} \\ x_3 &= -\sqrt{-s_1} + \sqrt{-s_2} + \sqrt{-s_3} \\ x_4 &= -\sqrt{-s_1} - \sqrt{-s_2} - \sqrt{-s_3} \end{aligned} \right\} \text{ wenn } b \text{ positiv ist,}$$

und

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-s_1} + \sqrt{-s_2} + \sqrt{-s_3} \\ x_2 &= \sqrt{-s_1} - \sqrt{-s_2} - \sqrt{-s_3} \\ x_3 &= -\sqrt{-s_1} + \sqrt{-s_2} - \sqrt{-s_3} \\ x_4 &= -\sqrt{-s_1} - \sqrt{-s_2} + \sqrt{-s_3} \end{aligned} \right\} \text{ wenn } b \text{ negativ ist.}$$

Substituiert man auch die Werte für  $a$ ,  $b$  und  $c$  in die Gleichung I., so erhält diese die Form

#### IV.

$$x^4 - 6\alpha x^2 \pm 8x\sqrt{\alpha^3 - 3\alpha(m^2 + 3q^2) - 2(m^3 - 9mq^2)} + 3(4m^2 + 12q^2 - \alpha^2) = 0$$

Berücksichtigt man, dass

$$s_1 = -\alpha + 2m$$

$$s_2 = -\alpha - m - 3q$$

$$s_3 = -\alpha - m + 3q$$



so lässt sich die Gleichung IV. auch schreiben:

$$V. \quad x^4 + 2(x_1 + x_2 + x_3)x^2 \pm 8x\sqrt{-x_1x_2x_3} + (x_1 + x_2 - x_3)^2 - 4x_1x_2 = 0$$

Weil nun die Wurzeln dieser Gleichung rational sein sollen, so muss man setzen

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -r^2 \\ x_2 &= -(s-\varphi)^2 \\ x_3 &= -(s+\varphi)^2 \end{aligned} \right\} \quad r, s \text{ und } \varphi \text{ sind beliebige rationale Zahlen.}$$

Hieraus folgt

$$a = \frac{r^2 + 2s^2 + 2\varphi^2}{3}$$

$$m = \frac{s^2 + \varphi^2 - r^2}{3}$$

$$q = \frac{2s\varphi}{3}$$

Ferner folgt

$$x_1 + x_2 + x_3 = -(r^2 + 2s^2 + 2\varphi^2)$$

$$\sqrt{-x_1x_2x_3} = r(s^2 - \varphi^2)$$

und

$$(x_2 + x_3 - x_1)^2 - 4x_2x_3 = (r + 2\varphi)(r - 2\varphi)(r + 2s)(r - 2s),$$

so ist hiernach die Form einer Gleichung 4. Grades

$$x^4 + ax^2 + by + c = 0$$

mit rationalen Wurzeln, wenn die Wurzeln der kubischen Resolvente, durch eine trigonometrische Formel berechnet, rational sind

#### VI.

$$x^4 - 2(r^2 + 2s^2 + 2\varphi^2)x^2 \pm 8r(s^2 - \varphi^2)x + (r + 2\varphi)(r - 2\varphi)(r + 2s)(r - 2s) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r + 2s \\ x_2 &= r - 2s \\ x_3 &= -r + 2\varphi \\ x_4 &= -r - 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad \text{wenn } 8r(s^2 - \varphi^2) \text{ negativ genommen,}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r + 2\varphi \\ x_2 &= r - 2\varphi \\ x_3 &= -r + 2s \\ x_4 &= -r - 2s \end{aligned} \right\} \quad \text{wenn } 8r(s^2 - \varphi^2) \text{ positiv genommen.}$$

Die Form der kubischen Resolvente der Gleichung VI. ist

$$y^3 + (r^2 + 2s^2 + 2\varphi^2)y^2 + y[2r^2(s^2 + \varphi^2) + (s^2 - \varphi^2)^2] + r^2(s^2 - \varphi^2)^2 = 0$$

$$\begin{aligned}y_1 &= -r^2 \\y_2 &= -(s-\varphi)^2 \\y_3 &= -(s+\varphi)^2\end{aligned}$$

Beispiel.

Setzt man in Gleichung VI.

$$\begin{aligned}r &= 4 \\ \varphi &= 3 \\ s &= 1\end{aligned}$$

so erhält man

$$x^4 - 72x^2 - 256x - 240 = 0$$

$$x_1 = 10; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = -2; \quad x_4 = -6$$

Die kubische Resolvente dieser Gleichung ist

$$y^3 + 36y^2 + 384y + 1024 = 0$$

$$y_1 = -16; \quad y_2 = -4; \quad y_3 = -16.$$

8. Welche Form hat eine vollständige Gleichung 4. Grades mit 4 rationalen Wurzeln?

Auflösung.

Setzt man in der unter 7. aufgestellten Gleichung VI.  $x = y - a$ , so erhält man die verlangte Gleichung

$$\begin{aligned}y^4 - 4ay^3 - 2y^2[r^2 + 2s^2 + 2\varphi^2 - 3a^2] + 4y[a(r^2 + 2s^2 + 2\varphi^2) - a^3 \\ \pm 2r(s^2 - \varphi^2)] + a^4 - 2a^2(r^2 + 2s^2 + 2\varphi^2) \mp 8ar(s^2 - \varphi^2) \\ + (r+2\varphi)(r-2\varphi)(r+2s)(r-2s) = 0\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}y_1 &= a + r + 2\varphi \\ y_2 &= a + r - 2\varphi \\ y_3 &= a - r + 2s \\ y_4 &= a - r - 2s\end{aligned} \right\} \text{ wenn das obere Vorzeichen genommen,}$$

$$\left. \begin{aligned}y_1 &= a + r + 2s \\ y_2 &= a + r - 2s \\ y_3 &= a - r + 2\varphi \\ y_4 &= a - r - 2\varphi\end{aligned} \right\} \text{ wenn das untere Vorzeichen genommen.}$$

Beispiel.

Setzt man in die obige Gleichung die Werte

$$\begin{aligned}a &= -1 \\ r &= 3\end{aligned}$$



Das zweite Kepler'sche Gesetz teilen wir in die 2 folgenden:

- a) Die Bahn des Planeten ist eine Ellipse.
- b) Die Sonne steht in einem ihrer Brennpunkte.

Wir untersuchen also zuerst die Bedingung, unter der überhaupt die Bahn eines nach einem Centrum  $C$  angezogenen Punktes  $P$  eine Ellipse ist.

Der Anfang der  $xy$  sei  $C$ , die Ellipse bestimmt durch die Gleichungen

$$x = \alpha + a \cos \mu; \quad y = \beta + b \sin \mu \quad (1)$$

Bezeichne  $r$  den Radiusvector,  $v$  das Potential der Anziehung auf die Masseneinheit,  $e$  die Excentricität,  $\gamma$  die Flächengeschwindigkeit. Dann wird die Bewegung durch die 2 Gleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial t^2} = 2v; \quad \frac{x \partial y - y \partial x}{\partial t} = 2\gamma \quad (2)$$

woraus nach Elimination von  $\partial t$ :

$$v = 2\gamma^2 \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{(x \partial y - y \partial x)^2}$$

Diesen Wert also muss das Potential haben, wenn  $P$  eine gegebene Curve  $f(x, y) = 0$  durchlaufen soll. Führt man, in Anwendung auf die Ellipse, die Werte (1) ein, so kommt:

$$v = 2\gamma^2 \frac{a^2 - e^2 \cos^2 \mu}{(ab + b\alpha \cos \mu + a\beta \sin \mu)^2} \quad (3)$$

Eine weitere Forderung ist, dass  $v$  eindeutige Function von  $r$  sei. Nun hat man:

$$\begin{aligned} r^2 &= (\alpha + a \cos \mu)^2 + (\beta + b \sin \mu)^2 \quad \text{oder} \\ r^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + b^2 + 2a\alpha \cos \mu + 2b\beta \sin \mu + e^2 \cos^2 \mu \end{aligned} \quad (4)$$

Untersucht man erst die Maxima und Minima von  $v$  und  $r$ , so findet man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \mu} &= 4\gamma^2 ab \frac{a\alpha \sin \mu - b\beta \cos \mu + e^2 \sin \mu \cos \mu}{(ab + b\alpha \cos \mu + a\beta \sin \mu)^3} \\ r \frac{\partial r}{\partial \mu} &= -a\alpha \sin \mu + b\beta \cos \mu - e^2 \sin \mu \cos \mu \end{aligned}$$

woraus:

$$\partial v = - \frac{4\gamma^2 ab r \partial r}{(ab + b\alpha \cos \mu + a\beta \sin \mu)^3}$$

Nun ist











X.

Ueber die von Challis vorgeschlagene neue Integrationsmethode von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und ihre Anwendung auf gewisse ungelöste Aufgaben aus der Variationsrechnung.

Von

**Magnus Ehrhorn,**

Candidat des höheren Schulamts aus Sumte bei Neuhaus a. d. Elbe.

---

Die vorliegende Arbeit enthält zunächst die Untersuchungen, die ich der Königlichen wissenschaftlichen Prüfungs-Commission zu Göttingen zur Erlangung der facultas docendi in der Mathematik eingereicht habe.

Von meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. Stern, dem ich für manchen freundlichen Rat und Beistand zu grossem Danke verpflichtet bin, wurde mir die Aufgabe in folgender Fassung gestellt:

„Was ist in dem von Challis (London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine, July 1871) angeregten Streite über die Lösung gewisser Aufgaben aus der Variationsrechnung das Richtige?“

Dieses Thema habe ich im Folgenden nochmals bearbeitet und mit einigen Ergänzungen versehen.

---









Bemerkung wiederholen, dass längs einer Sehne gerade so gut integriert werden kann, wie längs jeder andern Curve, dass dagegen die eigentliche Bedeutung und der Wert dieser Methode von Delaunay weit besser erkannt und hervorgehoben ist als von Challis. Delaunay führt diese Methode als eine neue Bezeichnungsweise ein, um zwei Ausdrücke, die er bei der Bildung der Variation eines vielfachen Integrals erhalten hat, in einen einzigen Ausdruck zu vereinigen und ein Doppelintegral einer Fläche in ein Randintegral zu verwandeln. Er betrachtet zur Erläuterung ein Doppelintegral

$$\iint h \cdot dx \cdot dy,$$

welches sich über alle Punkte der Ebene  $(x, y)$  erstreckt, die innerhalb der geschlossenen Curve  $AmBnA$  (Fig. 4.) liegen. Seien nun  $y_0$  und  $y_1$  mit der Bedingung  $y_1 > y_0$  die beiden Ordinaten dieser Curve, welche einem und demselben Werte der Abscisse entsprechen und seien  $x_0$  und  $x_1$  die Endabscissen  $Oa$  resp.  $Ob$ , so kann das Doppelintegral in der Form

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \cdot \int_{y_0}^{y_1} h \cdot dy$$

ausgedrückt werden. Wenn jetzt das unbestimmte Integral

$$\int h dy = H$$

und das bestimmte Integral

$$\int_{y_0}^{y_1} h dy = H_1 - H_0$$

ist, so ist

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \cdot \int_{y_0}^{y_1} h dy = \int_{x_0}^{x_1} H_1 dx - \int_{x_0}^{x_1} H_0 dx.$$

Indem nun das erste Integral  $\int_{x_0}^{x_1} H_1 dx$  den Inhalt der Fläche  $aAmBb$  darstellt und  $\int_{x_0}^{x_1} H_0 dx$  den Inhalt der Fläche  $aAnBb$ , stellt die obige Differenz der beiden Integrale den Inhalt der durch eine geschlossene Curve begrenzten Fläche  $AmBnA$  dar. Mit Berücksichtigung des bekannten Satzes

$$\int_a^b y dx = - \int_b^a y dx$$

nimmt die obige Differenz die Form an

$$\int_{x_0}^{x_1} H_1 dx + \int_{x_1}^{x_0} H_0 dx,$$

und diese beiden Glieder vereinigt Delaunay durch ein einziges Zeichen

$$\int_{(x)}^{(x)} H dx,$$









Ein solches Beispiel bietet die berühmte Aufgabe der Brachistochrone dar, bei welcher

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1+p^2}{x}} dx$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen ist und wo sich als zu integrierende Hauptgleichung

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{p}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+p^2}} = 0$$

ergiebt;

2) wenn in  $V$  ausser einer expliciten Function von  $x$  und den Differentialquotienten die abhängig Variabelo  $y$  nur in der ersten Potenz und nicht mit ihren Differentialquotienten multiplicirt vorkommt; wenn also allgemein  $V$  die Form hat

$$V = ay\varphi(x) + bf(x; p, q, r \dots).$$

Ein Beispiel dieser Art ist das von Stegmann in seinem Lehrbuche der Variationsrechnung §. 33. behandelte Problem: Es wird diejenige Beschaffenheit von  $y = f(x)$  gesucht, wodurch

$$J = \int_a^\xi \left( \frac{2ay}{x^2} - p^2 \right) dx$$

zu einem Maximum oder Minimum gemacht wird, wo für die festen Grenzen des Integrals die Bedingung  $0 < \alpha < \xi$  gelten soll.

III. Wir können nur die Gleichung  $Apdx = A dy = 0$  benutzen und integrieren, wenn in derselben  $y$ , aber nicht  $x$  explicit vorkommt. Dieser Fall tritt ein, wenn allgemein

$$V = a\varphi(y) + bxf(p) + cx^2\varphi(q) + \dots$$

Hierher gehören die von Challis unter II. und III. behandelten Aufgaben, die in §. 4. und 5. noch näher untersucht werden.

Hiermit dürfte klar gelegt sein, wann und warum wir in dem einen Falle beide Gleichungsformen, in einem andern Falle nur die eine von ihnen anwenden können.

#### Litteratur.

1) Cayley, On a supposed new integration of differential equations of the second order. (The London Philos. Magazine. 1871. vol. 42. p. 197).









Ordinaten hinausgehende Kreisbogen wirklich ein Maximum liefert, und dass uns der Wechsel des Vorzeichens des zweiten Differentialquotienten darüber nicht im Zweifel lässt.

Die Betrachtungen mit Zugrundelegung der Polarcoordinaten, auf welche Todhunter hinweist, führen nur zu derselben Schwierigkeit, die auch nur durch eine analoge Umänderung des bestimmten Integrals zu heben ist. Anderweitige richtige Beweise sind bereits länger bekannt; man vergleiche insbesondere die schönen Entwicklungen Steiner's in Crelle's Journal 1838. Bd. 18. p. 281.

#### Litteratur.

1) Legendre, Mémoire sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le calcul des variations. (Histoire de l'acad. royale des sciences. 1786. p. 27.

2) Stegmann, Lehrbuch der Variationsrechnung. p. 171.

3) Todhunter, History of the calculus of variations, art. 202 u. 366.

#### §. 4.

Die zweite Aufgabe, welche Challis behandelt, ist die folgende: Zwei feste Punkte durch eine ebene Curve so zu verbinden, dass sie bei ihrer Rotation um eine in derselben Ebene liegende Gerade einen Körper mit kleinster Oberfläche beschreibt.

Die allgemeine Gleichung der Oberfläche einer Rotationsfläche ist

$$O = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y ds.$$

Durch Benutzung der Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

woraus

$$\delta ds = \frac{dy}{ds} d\delta y$$

folgt, und durch partielle Integration erhalten wir als erste Variation

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} y ds = \left[ y \frac{dy}{ds} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left( 1 - \frac{d}{ds} \cdot \frac{y dy}{ds} \right) \delta y ds = 0$$

Die Integration der Hauptgleichung











ergiebt sich

$$y' = 2y$$

und

$$x - x' = py,$$

oder da

$$p = \frac{dy}{dx} = -\frac{dx'}{dy'} = -\frac{1}{p'},$$

so erhalten wir

$$x = x' - \frac{y'}{2p'}.$$

Daher ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2} \cdot dy'}{d\left(x' - \frac{y'}{2} \cdot \frac{1}{p'}\right)} = -\frac{1}{p'}$$

oder

$$\frac{dy'}{y'} + \frac{dp'}{p'(1+p'^2)} = 0,$$

woraus durch Integration

$$1) \quad dx' = \pm dy' \left( \frac{y'^2}{k^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

folgt, wenn  $k$  die willkürliche Integrationsconstante bezeichnet. Durch nochmalige Integration erhalten wir

$$2) \quad x' + c' = \pm \frac{y'}{2} \left( \frac{y'^2}{k^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{2} \log \left( \frac{y'}{k} \pm \sqrt{\frac{y'^2}{k^2} - 1} \right)$$

als Gleichung der Evolute, wenn  $c'$  eine zweite willkürliche Integrationsconstante bezeichnet, und wenn wir mit Cayley einen kleinen Fehler verbessern, indem  $\frac{y'}{2k}$  anstatt  $\frac{y'}{2}$  gedruckt ist. Diese Gleichung der Evolute ist wohl zuerst von Goldschmidt<sup>3)</sup> aufgestellt.

Die Gleichung 1) schreibt Challis dann in der Form

$$\pm \left( \frac{y'^2}{k^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dx'}{dy'} = -\frac{dy}{dx} = -p,$$

woraus

$$3) \quad \frac{y'}{k} = \sqrt{1+p^2}.$$

Da nun

$$x' = x + p(y - y') = x + p(y - k\sqrt{1+p^2}),$$

so erhält er durch Substitution in die Gleichung der Evolute

$$4) \quad x + c' = -py + \frac{kp}{2} \sqrt{1+p^2} + \frac{k}{2} \log(p + \sqrt{1+p^2})$$

als Differentialgleichung sämtlicher Evolventen obiger Evolute, die







Dies ist eine elliptische Differentialgleichung, deren Integration auf elliptische Functionen führt.

Nun ist schon früher von Delaunay<sup>1)</sup> gezeigt worden, dass die Rollcurve, welche der Brennpunkt einer auf einer festen Geraden ohne Gleiten rollenden Ellipse oder Hyperbel beschreibt, genau dieselbe Differentialgleichung hat. Sind die Halbaxen der beiden rollenden Kegelschnitte  $a$  und  $b$ , so müssen wir für die Rollcurve der Brennpunkte der Ellipse in der Differentialgleichung 4)  $+b^2$  und für die der Hyperbel  $-b^2$  nehmen (Fig. 9. und 10.). Die willkürliche isoperimetrische Constante  $a$  hat danach die geometrische Bedeutung, dass sie die grosse Halbaxe der rollenden Ellipse oder Hyperbel ist, und die verschiedenen Vorzeichen von  $a$  beziehen sich auf die sich nur durch ihre Lage unterscheidenden, sonst congruenten Rollcurven der beiden Brennpunkte eines und desselben Kegelschnittes. Durch Einführung der Excentricität

$$e = \frac{\sqrt{a^2 \pm b^2}}{a}$$

können wir die Differentialgleichung 4) umformen in

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\{y^2 \mp a^2(1 - e^2)\} dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \mp a^2(1 - e^2))^2}} \\ &= \frac{\{y^2 \mp a^2(1 - e^2)\} dy}{\sqrt{\{y^2 - a^2(1 + e)^2\} \{a^2(1 - e)^2 - y^2\}}} \end{aligned}$$

Substituieren wir hierin

$$5) \quad y^2 = a^2(1 - e)^2 \sin^2 \varphi + a^2(1 + e)^2 \cos^2 \varphi,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} y &= a(1 + e) \sqrt{1 - \frac{4e}{(1 + e)^2} \sin^2 \varphi} \\ &= a(1 + e) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = a(1 + e) \Delta(k, \varphi), \\ dy &= -a(1 + e) \frac{k^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= -a(1 + e) \frac{k^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi}{\Delta(k, \varphi)}, \\ dx &= -a(1 + e) \Delta(k, \varphi) d\varphi \mp a(1 - e) \frac{d\varphi}{\Delta(k, \varphi)} \end{aligned}$$

Nehmen wir hierin das obere Zeichen, so erhalten wir durch Integration













$$u = h_1 \frac{x - c_1}{y} + h_2 \frac{4a}{y}$$

und

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{du}{dx} = h_1 \frac{y - (x - c_1)p}{y^2} - h_2 \frac{4ap}{y^2} \\ &= \frac{4a^2 h_1 + 4a(x - c_1)h_2}{y^3}, \end{aligned}$$

sodass

$$\frac{u_1}{u} = \frac{4a^2 h_1 + 4a(x - c_1)h_2}{y^2 \{h_1(x - c_1) + 4ah_2\}} = \frac{B}{y^2}.$$

indem wir zur Abkürzung

$$\frac{4a^2 h_1 + 4a(x - c_1)h_2}{h_1(x - c_1) + 4ah_2} = B$$

setzen, worin  $h_1$  und  $h_2$  stets so gewählt werden können, dass  $B$  nie null und nie unendlich wird.

Der Quotient  $\frac{u_1}{u}$  wird jetzt für  $y = 0$  unendlich gross und zwar von der zweiten Ordnung. Der Ausdruck

$$\left( \delta p - \frac{u_1}{u} \delta y \right)^2$$

wird also für  $y = 0$  von der vierten Ordnung unendlich gross und das Product

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \left( \delta p - \frac{u_1}{u} \delta y \right)^2$$

wird für  $y = 0$  von der dritten Ordnung unendlich gross, so dass die Reihenentwicklung nicht convergirt, und das erste Glied, eine endliche Grösse, nicht das Zeichen bestimmt.

Mit diesen Betrachtungen glauben wir die Aufgabe endgültig dahin gelöst zu haben, dass, wenn die beiden gegebenen Punkte auf der Rotationsaxe selber liegen, nur in zwei Fällen eine wirkliche Lösung der Aufgabe möglich ist.

Erstens, wenn die gegebene constante Oberfläche gleich null ist, so ist die Rotationsaxe selber die gesuchte Curve.

Zweitens, wenn die gegebene constante Oberfläche  $= 4\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi$  ist, wo  $d = AB$  wie S. 139. gesetzt, so ist die gesuchte Curve ein Kreis, dessen Radius  $2a = \frac{d}{2}$  ist und dessen Mittelpunkt auf der Rotationsaxe liegt.



## §. 6.

Mit den im vorigen Paragraphen mittelst des integrierenden Factors  $p$  erhaltenen Lösungen erklärt Challis sich nicht einverstanden und sucht daher aus

$$A = y - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{ayq}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

allein mittelst seiner neuen Integrationsmethode die Lösung zu finden.

Unter Benutzung des Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{-(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

erhält Challis aus  $A = 0$  die Gleichung

$$1) \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = y \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\varrho} \right)$$

Mit Hülfe der bekannten Relationen zwischen den Coordinaten einer Curve und ihrer Evolute

$$\begin{aligned} y - y' - \frac{1+p^2}{q} &= \frac{\varrho}{\sqrt{1+p^2}}, \\ x - x' &= -p(y - y'), \\ pp' + 1 &= 0, \end{aligned}$$

worin  $x'$ ,  $y'$ ,  $p$ , sich auf die Evolute beziehen, findet er nach einigen Transformationen und Integration als erstes Integral

$$2) \quad \varrho^2 - 2a\varrho = -ky'^2,$$

worin  $k$  die willkürliche Integrationsconstante darstellt. Daraus folgt dann

$$3) \quad dx' = \pm dy' \left\{ \frac{(k^2 + k)y'^2 - a^2}{a - ky'^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

als Differentialgleichung der Evolute derjenigen durch die Hauptgleichung dargestellten Curve. Hieraus findet Challis die keineswegs sehr einfache Gleichung

$$4) \quad p^2 = \frac{(k^2 + k) \frac{y^2}{a^2} (2a - \varrho)^2 - a^2}{a^2 - k \frac{y^2}{a^2} (2a - \varrho)^2},$$

mit welcher wir uns als endgültigen Lösung begnügen müssen. Da diese Gleichung, welche sämtliche Evolventen der obigen Evolute darstellt, den Krümmungsradius  $\varrho$  enthält, so ist sie, gerade wie an-









nach der  $y$  Richtung

$$S'p'\mu', \quad S'p''\mu'', \quad S'''p'''\mu''',$$

endlich nach der  $z$  Richtung

$$S'p'\nu', \quad S'p''\nu'', \quad S'''p'''\nu''.$$

Also muss sein

$$\left. \begin{aligned} \Sigma Sp\lambda &= S'p'\lambda' + S'p''\lambda'' + \dots = 0 \\ \Sigma Sp\mu &= S'p'\mu' + S'p''\mu'' + \dots = 0 \\ \Sigma Sp\nu &= S'p'\nu' + S'p''\nu'' + \dots = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots 1)$$

Diese Gleichungen drücken die Bedingungen dafür aus, dass das Teilchen nicht fortbewegt wird. Zum vollständigen Gleichgewicht ist noch erforderlich, dass das Teilchen auch nicht gedreht wird, was durch folgende Gleichungen ausgedrückt wird:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma Sp(y\nu - z\mu) &= 0 \\ \Sigma Sp(z\lambda - x\nu) &= 0 \\ \Sigma Sp(x\mu - y\lambda) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 2)$$

Jetzt betrachten wir ein ganz kleines Teilchen von der Gestalt eines Prismas, dessen Höhe auch verhältnissmässig sehr klein sein soll, so dass die Seitenflächen gegen die Grundflächen vernachlässigt werden können.

Dann haben wir in den erhaltenen Gleichungen nur die zwei Glieder zu betrachten, die sich auf die Grundflächen beziehen.

Aus der ersten der Gleichungen 1) folgt

$$\Sigma Sp\lambda = S'p'\lambda' + S'p''\lambda'' = 0,$$

und da

$$S' = S''$$

$$p'\lambda' + p''\lambda'' = 0 \quad \text{oder} \quad p'\lambda' = -p''\lambda''.$$

Ebenso ergeben die zweite und dritte der Gl. 1)

$$p'\mu' = -p''\mu'' \quad \text{und} \quad p'\nu' = -p''\nu''.$$

Quadrirt man jede dieser drei Relationen, so kommt

$$p'^2(\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2) = p''^2(\lambda''^2 + \mu''^2 + \nu''^2)$$

und da

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = \lambda''^2 + \mu''^2 + \nu''^2 = 1,$$

$$p'^2 = p''^2 \quad \text{folglich} \quad p' = p'',$$

indem wir die Kraft als absolute Grösse betrachten (und demgemäss positiv setzen müssen).







Ist die Hypotenusenfläche  $= S$ , so sind die drei Kathetenflächen bezüglich

$$S' = S\alpha, \quad S'' = S\beta, \quad S''' = S\gamma.$$

Wir bezeichnen die absoluten Grössen der an der Hypotenusenfläche und an den Kathetenflächen wirkenden Kräfte durch  $p, p', p'', p'''$ .

Die Cosinus der Winkel, die sie mit den positiven Coordinaten-Richtungen bilden, seien bezüglich  $\lambda, \mu, \nu; \lambda', \mu', \nu'; \lambda'', \mu'', \nu''; \lambda''', \mu''', \nu'''$ .

Betrachten wir nun die Fläche  $S'$ , so herrscht hier, auf die Flächeneinheit bezogen, eine Spannung von der Grösse  $p'$ . Es sei  $\lambda' = -\lambda_1, \mu' = -\mu_1, \nu' = -\nu_1$ . Es findet hier nach Richtung der positiven und nach Richtung der negativen Körperabteilung eine gleiche, aber entgegengesetzte Spannung statt. Die nach dem positiven Körperteile (d. h. nach dem Teile des Körpers, dem die positive Seite der Fläche  $S'$  zugewandt ist) gerichtete Spannung hat die Componenten  $p'\lambda_1, p'\mu_1, p'\nu_1$ , und diese Grössen stimmen mit  $A, F, E$  auch dem Zeichen nach überein; dagegen hat die entgegengesetzt gerichtete Spannung — und diese kommt begreiflicherweise in unserem Falle allein in Betracht — die Componenten  $-p'\lambda_1, -p'\mu_1, -p'\nu_1$ , oder auch  $p'\lambda', p'\mu', p'\nu'$ ; diese sind also den Grössen  $A, F, E$  dem Zeichen nach entgegengesetzt. Analog verhält es sich mit  $p''\lambda'', \dots; p'''\lambda''', \dots; F, B, D; E, D, F$ . Daher ist

$$p'\lambda' = -A; \quad p''\mu'' = -B; \quad p'''\nu''' = -C.$$

$$p'\mu' = p''\lambda'' = -F.$$

$$p''\nu'' = p'''\mu''' = -D.$$

$$p'''\lambda''' = p'\nu' = -E.$$

Mit Anwendung der Gl. 1)

$$\Sigma Sp\lambda = 0, \quad \Sigma Sp\mu = 0, \quad \Sigma Sp\nu = 0$$

erhalten wir nun

$$Sp\lambda + S'p'\lambda' + S''p''\lambda'' + S'''p'''\lambda''' = 0,$$

oder

$$Sp\lambda - S\alpha \cdot A - S\beta \cdot F - S\gamma \cdot E = 0;$$

ebenso

$$Sp\mu - S\alpha \cdot F - S\beta \cdot B - S\gamma \cdot D = 0;$$

und

$$Sp\nu - S\alpha \cdot E - S\beta \cdot D - S\gamma \cdot C = 0;$$

oder vereinfacht

$$\left. \begin{aligned} p\lambda &= A\alpha + F\beta + E\gamma \\ p\mu &= F\alpha + B\beta + D\gamma \\ p\nu &= E\alpha + D\beta + C\gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 3)$$





$$\sqrt{\Pi'^2\alpha^2 + \Pi'^2\beta^2 + \Pi'^2\gamma^2} > \sqrt{\Pi'^2\alpha^2 + \Pi''\beta^2 + \Pi''^2\gamma^2} \\ > \sqrt{\Pi''^2\alpha^2 + \Pi''^2\beta^2 + \Pi''^2\gamma^2},$$

also

$$\Pi' > p > \Pi'',$$

oder

$$p' > p > p''.$$

Also, in den Hauptspannungsrichtungen erreicht nicht nur die senkrechte Spannungscomponente, sondern auch die **Gesamtspannung** ihr Maximum und ihr Minimum.

Wir betrachten wieder einen Körper, auf den beliebige Kräfte wirken, unter deren Einfluss die Teilchen desselben gewisse Verschiebungen gegen einander erleiden.

Findet an einer Stelle eine Entfernung der Teilchen von einander statt, so nennt man das eine **Dehnung** des Körpers an dieser Stelle, eine Näherung der Teilchen bezeichnet man als **Zusammendrückung**.

So wie man Druck als negativen Zug ansehen kann, so kann man auch Zusammendrückung als negative Dehnung bezeichnen. Auch hier gelten allgemeine Gesetze, und es können nur solche Dehnungen und Zusammendrückungen eintreten, die diesen Bedingungen entsprechen.

Ein Punkt  $M$  des Körpers habe jetzt, nach einer kleinen Verschiebung, die Coordinaten  $x, y, z$ ; vor der Verschiebung hatte er die Coordinaten  $x - \xi, y - \eta, z - \zeta$ .

$\xi, \eta, \zeta$  sind die Componenten der Verschiebung, die der Punkt  $M$  erlitten hat. Diese nehmen wir nun so klein an, dass wir höhere Potenzen derselben vernachlässigen können (klein gegen die Distanz zweier materiellen Punkte des Körpers).

Die Verschiebung ist eine Function der Coordinaten  $x, y, z$  des Punktes  $M$ ; wir nehmen an, dass diese sich stetig ändern, so dass die Differentialquotienten immer endlich bleiben; diese werden sogar sehr kleine Werte annehmen, in Folge der angenommenen Kleinheit der Verschiebungen.

Der Punkt  $M_1$  habe jetzt, nach der Verschiebung, die Coordinaten  $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ .

Da nun  $\xi = f(x, y, z)$  ist, so ist

$$\xi_1 = \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \xi}{\partial z} \delta z.$$

Daher hatte  $M_1$  ursprünglich parallel der  $x$  Axe die Coordinate

$$x + \delta x - \xi_1 =$$

$$(x + \delta x) - \left( \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \xi}{\partial z} \delta z \right).$$

Ebenso war die ursprüngliche  $y$  Coordinate gleich

$$(y + \delta y) - \left( \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \eta}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \eta}{\partial z} \delta z \right);$$

und die ursprüngliche  $z$  Coordinate gleich

$$(z + \delta z) - \left( \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \delta z \right).$$

Im damaligen Zustande war  $(MM_1)^2 =$

$$\begin{aligned} r_0^2 &= ((x - \xi) - (x + \delta x - \xi_1))^2 \\ &\quad + ((y - \eta) - (y + \delta y - \eta_1))^2 \\ &\quad + ((z - \zeta) - (z + \delta z - \zeta_1))^2 \\ &= \left[ \delta x - \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \xi}{\partial z} \delta z \right) \right]^2 \\ &\quad + \left[ \delta y - \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \eta}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \eta}{\partial z} \delta z \right) \right]^2 \\ &\quad + \left[ \delta z - \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \delta z \right) \right]^2 \end{aligned}$$

Nun, nach der Verschiebung, ist  $(MM_1')^2 =$

$$r^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2,$$

$r$  mache mit den Coordinatenachsen Winkel, deren Cosinus  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  seien.

Dann ist

$$\frac{\delta x}{r} = \alpha, \quad \frac{\delta y}{r} = \beta, \quad \frac{\delta z}{r} = \gamma.$$

Dann ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} \frac{r_0^2}{r^2} &= \left( \alpha - \frac{\partial \xi}{\partial x} \alpha - \frac{\partial \xi}{\partial y} \beta - \frac{\partial \xi}{\partial z} \gamma \right)^2 \\ &\quad + \left( \beta - \frac{\partial \eta}{\partial x} \alpha - \frac{\partial \eta}{\partial y} \beta - \frac{\partial \eta}{\partial z} \gamma \right)^2 \\ &\quad + \left( \gamma - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \alpha - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \beta - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \gamma \right)^2. \end{aligned}$$

Nun entwickeln wir beide Seiten in Reihen. Wir setzen

$$r = r_0(1 + \varepsilon),$$

wo  $\varepsilon$  die Dehnung der Längeneinheit in der Richtung  $MM_1$  bedeutet. (Die Richtungen  $r_0$  und  $r$  sind sozusagen parallel).

Alsdann ist

$$\frac{r_0^2}{r^2} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} = (1+\varepsilon)^{-2} = 1-2\varepsilon;$$

indem einer sehr kleinen Verschiebung auch eine sehr kleine Dehnung entspricht.

Entwickeln wir nun auch die andere Seite mit Vernachlässigung der Glieder mit Producten der Differentialquotienten, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} 1-2\varepsilon &= \frac{r_0^2}{r^2} \\ &= \alpha^2 - 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \alpha^2 + \frac{\partial \xi}{\partial y} \alpha\beta + \frac{\partial \xi}{\partial z} \alpha\gamma\right) \\ &\quad + \beta^2 - 2\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \alpha\beta + \frac{\partial \eta}{\partial y} \beta^2 + \frac{\partial \eta}{\partial z} \beta\gamma\right) \\ &\quad + \gamma^2 - 2\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \alpha\gamma + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \beta\gamma + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \gamma^2\right) \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= a; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = b; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = c; \\ \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) &= 2d; \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) = 2e; \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = 2f, \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} 1-2\varepsilon &= 1-2(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2d\beta\gamma + 2e\gamma\alpha + 2f\alpha\beta) \\ \text{oder} \quad \varepsilon &= a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2d\beta\gamma + 2e\gamma\alpha + 2f\alpha\beta \quad . . . . . 6) \end{aligned}$$

Hier haben wir für  $\varepsilon$  eine Gleichung ganz von derselben Form, wie Gl. 4), die uns einen Ausdruck für  $\Pi$  lieferte.

Statt der dortigen Coefficienten  $A, B, C, D, E, F$  haben wir hier  $a, b, c, d, e, f$ .

So wie wir  $a, b, c, d, e, f$  als gegeben annehmen, können wir sofort  $\varepsilon$  nach einer beliebigen Richtung  $(\alpha, \beta, \gamma)$  bestimmen.

Auf die Gleichung 6) können wir nun Betrachtungen anwenden, die den früher (bei Gl. 4)) angewandten ganz analog sind.

Auch hier überzeugen wir uns von dem Vorhandensein dreier auf einander senkrechter Hauptdehnungsrichtungen, die mit den Hauptaxen der Fläche

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exx + 2fxy = 1$$

zusammenfallen.



$$\begin{aligned}
\varepsilon &= L_1 \alpha_1 + M_1 \beta_1 + N_1 \gamma_1 = \sqrt{(L_1 \alpha_1 + M_1 \beta_1 + N_1 \gamma_1)^2} \\
&= \sqrt{(L_1^2 \alpha_1^2 + M_1^2 \beta_1^2 + N_1^2 \gamma_1^2 + 2L_1 M_1 \alpha_1 \beta_1 + 2L_1 N_1 \alpha_1 \gamma_1 + 2M_1 N_1 \beta_1 \gamma_1)} \\
&= \sqrt{L_1^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) + M_1^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) + N_1^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)} \\
&= \sqrt{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2}.
\end{aligned}$$

Die 3 Hauptaxen der eben erwähnten Fläche nehmen wir nun zu Coordinatenaxen. Was nehmen  $a, b, c, d, e, f$  daun für Werte an?

Die entwickelten Gleichungen gelten für jedes rechtwinkelige Coordinatensystem, nur werden jedesmal die Coefficienten  $a, b, c, d, e, f$  ihre Werte ändern.

Bezeichnen wir die drei Hauptdehnungen, d. i. die Dehnungen nach den drei Hauptrichtungen, mit  $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$ , so haben wir für unser neues Coordinatensystem:

$$a = \varepsilon', \quad b = \varepsilon'', \quad c = \varepsilon''', \quad d = 0, \quad e = 0, \quad f = 0.$$

(Wäre dem nicht so, dann könnte die Gleichung obiger Fläche auf dieses System auch nicht von der Form  $\varepsilon' y^2 + \varepsilon'' y^2 + \varepsilon''' z^2 = 1$  sein, d. h. die neuen Axen wären nicht die Hauptaxen der Fläche).

Die Dehnung nach einer beliebigen Richtung wird nun ausgedrückt durch  $(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\varepsilon = \varepsilon' \alpha^2 + \varepsilon'' \beta^2 + \varepsilon''' \gamma^2 \quad . . . . . 7)$$

Ist nun z. B.  $\varepsilon' > \varepsilon'' > \varepsilon'''$ , so ist offenbar

$$\varepsilon' \alpha^2 + \varepsilon' \beta^2 + \varepsilon' \gamma^2 > \varepsilon' \alpha^2 + \varepsilon'' \beta^2 + \varepsilon''' \gamma^2 > \varepsilon''' \alpha^2 + \varepsilon''' \beta^2 + \varepsilon''' \gamma^2,$$

oder

$$\varepsilon' > \varepsilon > \varepsilon''', \quad \text{d. h.}$$

Die Dehnung erreicht in einer Hauptaxe ein Maximum, in einer andern Hauptaxe ein Minimum.

Jetzt nehmen wir drei beliebige, auf einander senkrechte Richtungen:

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \quad \alpha_3, \beta_3, \gamma_3;$$

und suchen die Grösse der Dehnungen nach ihnen zu bestimmen. Wir haben sofort nach 7)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \varepsilon' \alpha_1^2 + \varepsilon'' \beta_1^2 + \varepsilon''' \gamma_1^2 \\
\varepsilon_2 &= \varepsilon' \alpha_2^2 + \varepsilon'' \beta_2^2 + \varepsilon''' \gamma_2^2 \\
\varepsilon_3 &= \varepsilon' \alpha_3^2 + \varepsilon'' \beta_3^2 + \varepsilon''' \gamma_3^2
\end{aligned}$$

Addiren wir diese drei Gleichungen, und berücksichtigen wir, dass













geben sein mussten, indem von den 9 Spannungscomponenten  $\begin{matrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{matrix}$  dreimal je zwei einander gleich sind.

So wie wir diese kennen, können wir für jede durch den Punkt gelegte Ebene die Spannung der Grösse und Richtung nach angeben. Indem wir  $A, B, C, D, E, F$  in der früheren Bedeutung nehmen, haben wir ja die Gl. 3):

$$\begin{aligned} p\lambda &= A\alpha + F\beta + E\gamma \\ p\mu &= F\alpha + B\beta + D\gamma \\ p\nu &= E\alpha + D\beta + C\gamma \end{aligned}$$

Können wir nun die Werte von  $A, B, C, D, E, F$  auf die Grössen  $a, b, c, d, e, f$  zurückführen, dann sind die Spannungen ausgedrückt durch die Verschiebungen. Dazu erinnern wir uns der Gleichungen 4) und 6):

$$\Pi = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta$$

und

$$\varepsilon = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2d\beta\gamma + 2e\gamma\alpha + 2f\alpha\beta.$$

Da nun

$$\Pi = k\varepsilon + Kv$$

ist nach Gl. 10), so folgt:

$$\begin{aligned} A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta = \\ k(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2d\beta\gamma + 2e\gamma\alpha + 2f\alpha\beta) \\ + Kv(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2), \end{aligned}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} (A - ka - Kv)\alpha^2 + 2(D - kd)\beta\gamma \\ + (B - kb - Kv)\beta^2 + 2(E - ke)\gamma\alpha \\ + (C - kc - Kv)\gamma^2 + 2(F - kf)\alpha\beta \end{aligned} \right\} = 0.$$

Dies gilt für jede beliebige Richtung  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ; daher muss jeder Coefficient = 0 sein, wie sich folgendermassen ergibt. Nehmen wir die Richtung  $(1, 0, 0)$ , d. h.  $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$ , so folgt aus letzter Gleichung sofort

$$(A - ka - Kv) \cdot 1^2 = 0 \quad \text{oder} \quad A = ka + Kv.$$

Ebenso liefern die Richtungen  $(0, 1, 0)$  und  $(0, 0, 1)$

$$(B - kb - Kv) = 0 \quad \text{und} \quad (C - kc - Kv) = 0.$$

Daher bleibt noch von obiger Gleichung

$$\begin{aligned} 2(D - kd)\beta\gamma + 2(E - ke)\gamma\alpha + 2(F - kf)\alpha\beta = 0 \quad \text{oder} \\ (D - kd)\beta\gamma + (E - ke)\gamma\alpha + (F - kf)\alpha\beta = 0. \end{aligned}$$



Moleküle des Körpers gemacht, es sei denn, dass wir einen homogenen, isotropen Körper voraussetzen.

Cauchy macht gewisse Hypothesen über die Moleküle, ihre Anordnung, ihre Wirkungen, und kommt auf Grund dessen zu dem Resultate  $K = \frac{k}{2}$ . Wir gehen nicht näher auf seine Entwicklungen ein, da seine Annahmen nicht so ganz zuverlässig sind.

Poisson von anderen Betrachtungen ausgehend fand ebenfalls  $K = \frac{k}{2}$ .

Lamé und Clapeyron, wieder von anderen Betrachtungen ausgehend, fanden dieselbe Gleichung.

Also mehrere Mathematiker gelangten mit ihren verschiedenen Hypothesen zu demselben Schlusse. Lässt sich nun dieses Resultat experimentell prüfen?

Man kann folgende Untersuchung anstellen:

Wir nehmen einen prismatischen Körper und belasten ihn. Wird er nun in die Länge gezogen, so zieht er sich seitlich zusammen.

Die nun anzustellenden Beobachtungen müssen mit der entwickelten Formel verglichen werden.

Sei der Stab sehr dünn. In Folge der Belastung dehnt sich die Längeneinheit um  $\varepsilon'$  aus, die seitlichen Zusammenziehungen oder negativen Dehnungen sind  $\varepsilon''$  und  $\varepsilon'''$ . Ueberall in dem Körper entsteht nun in der Längsrichtung eine Spannung, eine Hauptspannung, die sich bestimmt durch die Gleichung:

$$\Pi' = P = k\varepsilon' + Kv.$$

Die beiden anderen Spannungen sind verschwindend klein, und es ist

$$\Pi'' = 0 = k\varepsilon'' + Kv,$$

$$\Pi''' = 0 = k\varepsilon''' + Kv.$$

Hieraus folgt

$$k(\varepsilon'' - \varepsilon''') = 0, \quad (\varepsilon'' - \varepsilon''') = 0, \quad \varepsilon'' = \varepsilon'''.$$

Dies war vorauszusehen.

Wir haben daher

$$0 = k\varepsilon'' + Kv = k\varepsilon'' + K(\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''') = K\varepsilon' + (k + 2K)\varepsilon'',$$

mithin









$$13) \quad q = \frac{k+3K}{k+2K} \cdot k.$$

Nach Cauchy und Poisson ist  $K = \frac{k}{2}$ , also  $q = \frac{5}{4}k$ .

Nach Wertheim hingegen ist  $K = k$ , also  $q = \frac{4}{3}k$ .

2) Nehmen wir an, sowohl in der Längenrichtung als in der Breitenrichtung wirke eine Kraft  $P_2$ . Dann wird der Körper in der Höhenrichtung eine Contraction erleiden. Wir haben dann:

$$\Pi' = P_2 = k\varepsilon' + Kv; \quad \Pi'' = P_2 = k\varepsilon'' + Kv; \quad \Pi''' = 0 = k\varepsilon''' + Kv.$$

Daraus ergibt sich

$$2P_2 = k(\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''') + 3Kv = (k+3K)v,$$

$$P_2 = k\varepsilon' + Kv = k\varepsilon' + K \cdot \frac{2P_2}{k+3K}, \quad k\varepsilon' = \frac{k+K}{k+3K} P_2,$$

$$P_2 = \frac{k+3K}{k+K} \cdot k\varepsilon'.$$

Um hier dasselbe  $\varepsilon'$  hervorzubringen wie im ersten Falle muss also der Wert der beiden  $P_2$  grösser sein als der des dortigen  $P_1$ .

Dadurch, dass nach zwei Dimensionen Kräfte wirken, dass zur Spannung in der Längsrichtung noch eine seitliche Spannung hinzukommt, wird die Dehnung in der Längsrichtung erschwert.

3) Wirken nach allen drei Dimensionen drei gleiche Kräfte  $P_3$ , wie das der Fall ist, wenn der Körper sich in comprimiertem Wasser befindet, so ist

$$\Pi' = P_3 = k\varepsilon' + Kv; \quad \Pi'' = P_3 = k\varepsilon'' + Kv; \quad \Pi''' = P_3 = k\varepsilon''' + Kv.$$

Addirt man, so kommt

$$3P_3 = k(\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''') + 3Kv = (k+3K)v.$$

Demgemäss haben wir

$$P_3 = k\varepsilon' + Kv = k\varepsilon' + K \cdot \frac{3P_3}{k+3K},$$

also

$$k\varepsilon' = \frac{k}{k+3K} \cdot P_3, \quad P_3 = \frac{k+3K}{k} \cdot k\varepsilon'.$$

Die Dehnung nach der Längsrichtung ist also noch mehr erschwert.

Um in allen drei Fällen dieselbe Dehnung  $\varepsilon'$  nach der Längsrichtung hervorzubringen, muss also sein







Endlich ist die  $z$  Komponente

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)\delta x \delta y \delta z.$$

Diesen Molekularkräften muss die äussere Kraft das Gleichgewicht halten für den Zustand der Ruhe. Sie ist, wie wir annehmen, dem Massenteilchen proportional. Auf die Masseneinheit bezogen seien ihre Componenten  $X, Y, Z$ . Das Volumen des Parallelepipeds ist  $\delta x \delta y \delta z$ , seine Dichtigkeit sei  $\varrho$ . Dann hat man

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}\right)\delta x \delta y \delta z + X \cdot \varrho \cdot \delta x \delta y \delta z = 0,$$

oder

$$14) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z} + \varrho X = 0. \\ \text{Ebenso} \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z} + \varrho Y = 0 \\ \text{und} \\ \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} + \varrho Z = 0. \end{array} \right.$$

Flüssige und luftförmige Körper können wir ebenfalls als elastische Körper betrachten, nur haben wir hier noch eine gewisse Vereinfachung. Der Druck ist nach allen Richtungen gleich, und zudem die Spannung auf allen Ebenen senkrecht. In diesen Fällen wird  $D = E = F = 0$ ; dies drückt nämlich aus, dass die Kraft auf den betreffenden Ebenen senkrecht ist. Ferner wird  $A = B = C = -P$ , indem  $P$  den Druck bedeutet. (Zug = positive Spannung, Druck = negative Spannung). Dadurch werden für diese Fälle unsere obigen Gleichungen:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \varrho X, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \varrho Y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \varrho Z.$$

Dies sind die drei hydrostatischen Gleichungen, welche Anwendung finden, wenn eine äussere Kraft auf eine Flüssigkeit wirkt. Nehmen wir z. B. an, jene äussere Kraft sei die Schwerkraft und wirke nach Richtung der  $z$  Axe, so ist

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = P.$$

Also sind die Gleichgewichtsgleichungen:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = Z\varrho.$$

Wir setzen nun in Gl. 14) die früher in Gl. 11) gefundenen Werte für  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  ein. Wir hatten:

$$A = k \frac{\partial \xi}{\partial x} + Kv; \quad F = \frac{k}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right); \quad E = \frac{k}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)$$

Mithin kommt

$$\frac{\partial A}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + K \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{k}{2} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right); \quad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{k}{2} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right).$$

Addiren wir diese drei Gleichungen, so kommt

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z} &= \frac{k}{2} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \\ &\quad + \frac{k}{2} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} \right) + K \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} \right) &= \frac{k}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{k}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

und nach Gl. 12)

Daher erhalten wir

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{k}{2} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + \frac{k}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + K \frac{\partial v}{\partial x}$$

Ebenso können wir ableiten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z} = \frac{k}{2} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) + \frac{k}{2} \frac{\partial v}{\partial y} + K \frac{\partial v}{\partial y}$$

und

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{k}{2} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + \frac{k}{2} \frac{\partial v}{\partial z} + K \frac{\partial v}{\partial z}$$

Setzen wir dies in die Gl. 14) ein, und dividiren durch  $\varrho$ , so kommt

$$15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{k}{2\varrho} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + \frac{k+2K}{2\varrho} \frac{\partial v}{\partial x} + X &= 0 \\ \frac{k}{2\varrho} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) + \frac{k+2K}{2\varrho} \frac{\partial v}{\partial y} + Y &= 0 \\ \frac{k}{2\varrho} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + \frac{k+2K}{2\varrho} \frac{\partial v}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right.$$

Aus diesen Gleichgewichtsgleichungen kann man nun die Bewegungsgleichungen für elastische Schwingungen ableiten. Wir haben nach Gl. 14):

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}\right) \delta x \delta y \delta z + X \varrho \delta x \delta y \delta z = 0.$$

Dieser Ausdruck stellt die gesammte Kraft dar, die die einzelnen Moleküle nach der  $x$  Richtung zu verschieben sucht; wir denken uns, dass sie den Mittelpunkt des Parallelepipeds angreife. Dieser Ausdruck = Null gesetzt, gibt eine Gleichung, notwendig für das Gleichgewicht.

Nehmen wir nun einmal an, jener Ausdruck sei nicht Null, dann haben wir nicht mehr das durch Gl. 14) ausgedrückte Gleichgewicht, dann tritt Bewegung ein. Ist obiger Wert =  $U$ , so liefern uns die Fundamentalgleichungen für die Bewegung die Relation

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = U, \text{ wo } m = \varrho \cdot \delta x \delta y \delta z \text{ ist.}$$

$x, y, z$  sind die Coordinaten irgend eines bewegten Punktes zur Zeit  $t$ . Im ursprünglichen Zustande hatte dieser Punkt  $M$  die Coordinaten

$$x_0 = x - \xi, \quad y_0 = y - \eta, \quad z_0 = z - \zeta.$$

Sonach ist auch

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta.$$

$x_0, y_0, z_0$  sind von  $t$  unabhängig, aber  $\xi, \eta, \zeta$  ändern sich mit der Zeit. Daher ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \text{ etc.}$$

Aus der Relation  $m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = U$  erhalten wir nun

$$\varrho \cdot \delta x \delta y \delta z \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}\right) \delta x \delta y \delta z + X \varrho \cdot \delta x \delta y \delta z$$

oder

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}\right) + \varrho X = \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Ebenso folgen aus  $m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = U$ , und  $m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = U$ , die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z} + \varrho Y = \varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

und

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} + \varrho Z = \varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}.$$

Setzen wir nun für  $A, B, C, D, E, F$  wieder ihre früheren Werte ein, und dividiren durch  $\varrho$ , so erhalten wir





Wir haben nur Spannungen ( $A$ ) zu betrachten, die zum Querschnitte senkrecht sind.

Aus unserer früheren Gleichung

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}\right) + \rho X = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

erhalten wir also die vereinfachte Gleichung

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + X = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Steht der Stab vertical, versetzt man ihn durch eine momentane äussere Kraft in Schwingungen, so bleibt als beständige äussere Kraft noch die Schwerkraft übrig; dann bedeutet also  $X$  die Schwerkraft, und diese ist dann einigermaßen von Einfluss. Bei horizontaler Lage des Stabes können wir die Schwerkraft ganz unbedenklich vernachlässigen.

Dann wird unsere Gleichung noch einfacher:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial A}{\partial x},$$

wo

$$A = k \frac{\partial \xi}{\partial x} + Kv$$

zu setzen ist.

Wir hatten nun früher aus den Gleichungen

$$\Pi'' = 0 = k\varepsilon'' + Kv$$

$$\Pi''' = 0 = k\varepsilon''' + Kv$$

abgeleitet:

$$0 = k(\varepsilon'' + \varepsilon''') + 2Kv = k(\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''') + 2Kv - k\varepsilon',$$

oder

$$kv + 2Kv = k\varepsilon',$$

also

$$v = \frac{k}{k + 2K} \cdot \varepsilon'.$$

Dies gibt, da  $\varepsilon' = \frac{\partial \xi}{\partial x}$  ist,

$$v = \frac{k}{k + 2K} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Sonach erhalten wir für  $A$

$$\begin{aligned} A &= k \frac{\partial \xi}{\partial x} + K \cdot \frac{k}{k + 2K} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= k \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(1 + \frac{K}{k + 2K}\right) = k \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{k + 3K}{k + 2K} \end{aligned}$$



die Dehnung  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  durch  $\varepsilon'$ , so können wir dieses Verhältniss auch schreiben  $1:(1+\varepsilon')$ .

Eine Zusammendrückung entspricht einem negativen Werte von  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  oder  $\varepsilon'$ .

Um diese Dehnung  $\varepsilon'$  hervorzubringen, ist eine Kraft erforderlich ( $P$ ), die sich bestimmt durch die Gleichung

$$P = q\varepsilon',$$

wo  $q$  den Elasticitätscoefficienten bedeutet. Hier ist  $P$  bezogen auf die Einheit des Querschnitts. Für unseren Stab mit dem Querschnitt  $a$  ist die Kraft

$$P = aq\varepsilon' = aq \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

erforderlich.

Nachdem die Dehnung erfolgt ist, streben mit einer solchen Kraft die Teilchen  $o_1$  und  $o_3$ , einander zu nähern (oder sich von einander zu entfernen, wenn  $\varepsilon'$  negativ, also eine Zusammendrückung erfolgt war).

Während nun bei  $o_2$  mit der Kraft  $aq \frac{\partial \xi}{\partial x}$  eine Zusammenziehung oder mit der Kraft  $-aq \frac{\partial \xi}{\partial x}$  eine Dehnung angestrebt wird, wirkt bei  $o_4$ , einem um  $\delta x$  entfernten Querschnitte, dessen ursprüngliche Coordinate  $x + \delta x$  war, eine dehnende Kraft von der Grösse

$$-aq \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta x \right).$$

Die Stellen  $o_2$  und  $o_4$  wirken nun folgendermassen auf einander.

$o_2$  zieht mit einer Kraft  $aq \frac{\partial \xi}{\partial x} \dots o_4$  nach der negativen Richtung,  $o_4$  zieht  $o_2$  mit einer Kraft  $aq \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta x \right)$  nach der positiven Richtung.

Es resultirt demnach eine Kraft  $aq \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta x$ , die das Teilchen ( $o_1 o_2 o_3$ ) in der positiven  $x$  Richtung zu bewegen sucht.

Aus unserer Grundgleichung

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = U$$

haben wir jetzt, da  $m = \rho \cdot a \delta x$  ist, wo  $\rho$  die Masse der Volumeneinheit, und  $a \delta x$  das Volumen des Teilchens bedeutet,

$$\rho \cdot a \delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = U = a q \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta x,$$

mithin

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{q}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Dies ist die schon vorhin erhaltene Gleichung.

Da  $q$  und  $\rho$  positive Grössen sind, so können wir setzen

$$17) \quad \frac{q}{\rho} = c^2,$$

(wo  $c$  also von unserem früheren  $c$  wohl zu unterscheiden ist).

In Folge dessen wird unsere Gleichung

$$18) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Die allgemeine Auflösung dieser partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$19) \quad \xi = f(x - ct) + F(x + ct).$$

Sie enthält zwei völlig willkürliche Functionen  $f$  und  $F$ , eine mit dem Argument  $(x - ct)$  und eine mit dem Argument  $(x + ct)$ .

Dass diese Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung 18) genügt, davon kann man sich leicht durch Differentiiren überzeugen. Man erhält

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c f'(x - ct) + c F'(x + ct)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 f''(x - ct) + c^2 F''(x + ct)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = f'(x - ct) + F'(x + ct)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = f''(x - ct) + F''(x + ct)$$

Also

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 (f''(x - ct) + F''(x + ct)) = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Unseren dünnen prismatischen Stab, den wir gleichsam als gerade Linie ansehen können, liessen wir in die Richtung der  $x$  Axe fallen, und erhielten dann die obige Beziehung Gl. 19), die immer gültig ist,

was für willkürliche Functionen wir auch wählen mögen. Wir wollen nun eine der beiden Functionen specialisiren, und zwar  $F = 0$  setzen.

Dann behalten wir

$$\xi = f(x - ct).$$

Der Punkt  $x$  hat zur Zeit  $t$  eine gewisse Verschiebung  $\xi$ ; zur Zeit  $t'$  hat ein anderer Punkt  $x'$  die Verschiebung

$$\xi_1 = f(x' - ct').$$

Wählen wir nun den Punkt  $x'$  so, dass die Gleichung stattfindet

$$x' = x + c(t' - t),$$

so wird

$$\xi_1 = f(x + ct' - ct - ct') = f(x - ct) = \xi;$$

d. h. zur Zeit  $t'$  findet am Punkte  $x'$  dieselbe Verschiebung statt, wie zur Zeit  $t$  am Punkte  $x$ . Während der Zeit  $(t' - t)$  hat sich also der Zustand des Punktes  $x$  um  $(x' - x)$  in der positiven  $x$  Richtung fortgepflanzt, wobei  $\frac{x' - x}{t' - t} = c$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist.

Mit derselben Geschwindigkeit pflanzt sich der Verschiebungszustand eines jeden Punktes in der positiven  $x$  Richtung fort; d. i. das ganze Verschiebungssystem wandert mit der Geschwindigkeit  $c$  auf dem ganzen Stabe (dies ist das, was bei der Fortpflanzung des Schalles stattfindet).

Nehmen wir nun einmal an  $f = 0$ ; dann kommt

$$\xi = F(x + ct).$$

Setzen wir  $x' + ct' = x + ct$ , also  $x' = x - c(t' - t)$ , mithin  $c = -\frac{x' - x}{t' - t}$ , so wird

$$\xi_1 = F(x' + ct') = F(x + ct) = \xi;$$

d. h. um die Zeit  $t'$  befindet sich der Stab bei  $x'$  in demselben Zustande, wie zur Zeit  $t$  bei  $x$ ; hier fällt nun in die Augen, dass die Verschiebung unverändert mit der Geschwindigkeit  $c$  auf dem Stabe nach rückwärts wandert.

Haben wir nun

$$\xi = f(x - ct) + F(x + ct),$$

so können wir  $\xi = \xi_1 + \xi_2$  setzen, d. h.  $\xi$  in zwei solche Teile  $\xi_1$  und  $\xi_2$  zerlegen, dass

$$\xi_1 = f(x - ct) \text{ und } \xi_2 = F(x + ct) \text{ ist.}$$

Hiernach ist klar, dass die Verschiebung, die auf dem Stabe



heit in der Längsrichtung des Stabes, mit  $\frac{1}{k_{\parallel}}$  Millimeter in einer darauf senkrechten Richtung. (Die Unterscheidung von  $k_{\parallel}$  und  $k_{\perp}$  gewährt eine gewisse Uebersichtlichkeit). Auf die Flächeneinheit  $\frac{1}{k_{\perp}^2}$  Quadratmillimeter bezogen wird dann der Elasticitätscoefficient

$$q = \frac{19300}{k_{\perp}^2} \text{ Kilogramm.}$$

Wird durch das Gewicht  $p$  die Längeneinheit um  $\delta$  ausgedehnt, so ist die neue Länge  $l_1 = l(1 + \delta)$  und  $p = q \cdot \delta$ .

Wäre es möglich, dass  $\delta = 1$  werden könnte, so würde das entsprechende  $p = q \cdot 1 = q$  sein. Demnach kann man den Elasticitätscoefficienten  $q$  auch als die Kraft bezeichnen, welche in dem erwähnten (in der Wirklichkeit unmöglichen, aber) als möglich gedachten Falle die Dehnung  $\delta = 1$  hervorbringen würde.

Ein Kubikcentimeter Wasser (im Maximum der Dichtigkeit bei 4° C.) hat das Gewicht eines Grammes; also wiegt

$$1 \text{ Kubikmillimeter Wasser} = \frac{1}{10^3} \text{ Gr.} = \frac{1}{10^3 \cdot 10^3} \text{ Kilogrm.}$$

Also wiegt die Volumeneinheit Wasser oder

$$\frac{1}{k_{\parallel} \cdot k_{\perp} \cdot k_{\perp}} \text{ Kubikmillimeter Wasser} = \frac{1}{10^3 \cdot 10^3 \cdot k_{\parallel} \cdot k_{\perp} \cdot k_{\perp}} \text{ Kilogrm.}$$

Die Masse von der Volumeneinheit Wasser ist somit gleich

$$\frac{1}{10^6 \cdot k_{\parallel} \cdot k_{\perp}^2 \cdot g} = \frac{1}{10^6 \cdot k_{\parallel} \cdot k_{\perp}^2 \cdot 9,809} \quad *)$$

(Es kann  $k_{\parallel} = k_{\perp}$  einen solchen speciellen Wert haben, dass diese Masse der Volumeinheit Wasser auch = 1 wird).

Stahl hat nun das specifische Gewicht 7,72; somit ist die Masse der Volumeneinheit Stahl

$$\varrho = \frac{7,72}{10^6 \cdot k_{\parallel} \cdot k_{\perp}^2 \cdot 9,809},$$

wo  $g = 9^m,809 = 9809^{\text{mm}}$  die Fallgeschwindigkeit bedeutet.

Führen wir nun, wie es hier noch nötig ist, in  $g$  als Längeneinheit  $\frac{1}{k_{\parallel}}$  Millimeter (und nicht  $\frac{1}{k_{\perp}}$  Millimeter, als der Verschiebung

---

\*) Die Anordnung könnte exacter sein.





Ein Punkt  $x$  hat zu zwei verschiedenen Zeiten  $t$  und  $t'$  die resp. Verschiebungen

$$\xi_t = f(x - ct) + F(x + ct) \quad \text{und} \\ \xi_{t'} = f(x - ct') + F(x + ct').$$

Setzen wir nun  $t' = t + \tau$ , und bestimmen wir ferner  $\tau$  so, dass

$$c(t' - t) = c\tau = 2l,$$

so kommt

$$\begin{aligned} \xi_{t'} &= f(x - ct - c\tau) + F(x + ct + c\tau) \\ &= f(x - ct - 2l) + F(x + ct + 2l) \\ &= f(x - ct) + F(x + ct) = \xi_t. \end{aligned}$$

Zur Zeit  $t' = t + \tau$  ist also die Verschiebung des Punktes  $x$  dieselbe wie zur Zeit  $t$ .

Die Schwingungsdauer  $\tau$  ist demnach  $= \frac{2l}{c}$ , und da  $\frac{l}{c}$  die Zeit bedeutet, in welcher der Schall sich um die Strecke  $l$  fortpflanzt, so ist  $\tau = \frac{2l}{c}$  die Zeit, die der Schall gebraucht, um (die Strecke  $l$ ) den ganzen Stab hin und zurück zu durchlaufen. Bedeutet  $n$  die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit, so ist

$$n = \frac{1}{\tau} = \frac{c}{2l}.$$

Ferner ist noch

$$\tau = 2l \cdot \frac{1}{c} = 2l \cdot \sqrt{\frac{\rho}{q}} \quad \text{und}$$

20)

$$n = \frac{1}{2l} \cdot c = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{q}{\rho}}$$

Dies also findet statt, wenn der Stab an beiden Enden fest ist.

2) Nehmen wir jetzt den Fall, wo beide Endpunkte des Stabes frei sind.

An den freien Enden des Stabes findet nun wohl Verschiebung, aber, da sich dort kein Widerstand vorfindet, keine Spannung, keine Dehnung statt.

Die Grenzbestimmungen lauten demnach (für alle Zeiten  $t$ )

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{(x=0)} = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{(x=l)} = 0.$$

$\frac{\partial \xi}{\partial x}$  bedeutet bekanntlich die „verhältnissmässige Dehnung“ in der Längsrichtung. Man erhält nun leicht

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = f'(x - ct) + F'(x + ct);$$

also

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \bigg|_{(x=0)} = f'(-ct) + F'(ct) = 0$$

und

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \bigg|_{(l=x)} = f'(l - ct) + F'(l + ct) = 0.$$

Diese Gleichungen entsprechen  $f'$  und  $F'$  in derselben Weise, wie früher im Falle 1) die beiden Gleichungen  $f(-ct) + F(ct) = 0$  und  $f(l - ct) + F(l + ct) = 0$  den Functionen  $f$  und  $F$  entsprachen. So sind nun  $f'$  und  $F'$  für alle Werte bestimmt, deren Argumente hier vorkommen können, so bald sie nur und ihre Derivirten für die Argumente zwischen 0 und  $l$  bekannt sind. Die Functionen  $f'$  und  $F'$  sind zudem periodisch, und die Dauer einer solchen um  $2l$  periodischen Schwingung ist wieder  $\tau = \frac{2l}{c}$ . Also Dehnung und Zusammen-drückung, dargestellt durch

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = f'(x - ct) + F'(x + ct),$$

sind periodisch. Desgleichen ist auch die Geschwindigkeit der Verschiebungen periodisch, da

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -cf'(x - ct) + cF'(x + ct)$$

aus zwei um  $2l$  periodischen Teilen besteht. Der Unterschied zwischen diesem und dem ersten Falle besteht darin, dass dort die Function selbst, hier ihre Ableitungen nach  $x$  gegeben sind.

Wie steht es nun mit der Function  $\xi$  selbst?

Die Gleichung

$$\xi = f(x - ct) + F(x + ct)$$

zeigt, dass nur solche Functionen von  $x$  und  $t$  für  $\xi$  zulässig sind, in welchen  $x$  und  $t$  so vorkommen, dass die Function eben geteilt werden kann in 2 Teile, einen mit dem Argument  $(x - ct)$ , einen mit dem Argument  $(x + ct)$ . Eine Potenz ( $t^n$ ) von  $t$  würde Glieder von der Form  $(x - ct)^m \cdot (x + ct)^{n-m} \cdot h$  enthalten, wo also die fraglichen Argumente  $(x - ct)$  und  $(x + ct)$  von einander untrennbar wären (für  $n = 1$  ausgenommen). Zu einer solchen Potenz  $t^n$  müssten also noch

Glieder  $h_0x^n$ ,  $h_1x^{n-1}t$ ,  $h_2x^{n-2}t^2$ , . . . hinzutreten, um Functionen der verlangten Art bilden zu können. Hat man Functionen

$$\xi_1 = f_1(x-ct) + F_1(x+ct), \quad \xi_2 = f_2(x-ct) + F_2(x+ct), \text{ etc. etc.}$$

so ist z. B.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 + \dots = (f_1 + f_2 - f_3 + f_4 + \dots) + (F_1 + F_2 - F_3 + F_4 + \dots)$$

wieder eine Function der verlangten Art.

Im Falle 1) war  $F(+z) = -f(-z)$ , also

$$F(x+ct) = -f(-x-ct) = -f(2l-x-ct).$$

Setzen wir dort  $2l-x = x_1$ , so dass  $x+x_1 = 2l$ , so wird

$$\xi = f(x-ct) + F(x+ct) = f(x-ct) - f(x_1-ct).$$

(Zu einer um  $\frac{\tau}{2} = \frac{l}{c}$  späteren Zeit ist (für dasselbe  $x$ )

$$\xi_1 = f\left(x-ct - c \cdot \frac{l}{c}\right) - f\left(x_1-ct - c \cdot \frac{l}{c}\right) = f(x-l-ct) - f(l-x-ct),$$

woraus durchaus nicht folgt, dass zu zwei um  $\frac{\tau}{2}$  entfernten Zeiten die Verschiebungen gleiche und entgegengesetzte Werte hätten).

Schreiben wir  $\xi = f + F = f_1 + f_2 + F_1 + F_2$  so:

$$\begin{aligned} \xi &= \left[ f(x-ct) + \frac{h \cdot (x-ct)}{2c} \right] - h \cdot \frac{(x-ct)}{2c} \\ &+ \left[ F(x+ct) - \frac{h \cdot (x+ct)}{2c} \right] + h \cdot \frac{(x+ct)}{2c}, \end{aligned}$$

so ist  $\xi$  in der in 1) erklärten Art periodisch.

Die beiden Teile  $f_2$  und  $F_2 = -h \cdot \frac{x-ct}{2c} + h \cdot \frac{(x+ct)}{2c} = ht$  bezeichnen eine in der  $x$  Richtung erfolgende (für alle Punkte gleiche) Translation.

Die Teile  $f_1$  und  $F_1$  stellen deshalb keine periodische Verschiebung wie in 1) dar, indem hier die mit der Geschwindigkeit  $h$  erfolgende Translation allemal in derselben Weise von den Functionen  $f$  und  $F$  abgezogen ist (bei positiven und negativen Werten derselben).

Im Falle 1) sind an die Functionen  $\xi$  selbst die Bedingungen geknüpft, für  $x=0$  sowohl als für  $x=l$  solle  $\xi=0$  sein. Verschiedene Combinationen von zwei Functionen  $f$  und  $F$  können die-



für alle Punkte und alle Zeiten um eine Constante vergrössert. Aber die Dehnung und Zusammendrückung ist, wie es sein muss, in den Fällen  $\xi = f + F$  und  $\xi = f + F + ht$  unverändert dieselbe.

Für uns ist die Periodicität der Bewegungen wichtig. Nimmt man zwei gleich lange Glasröhren, die aber verschiedene Dicken haben können, und reibt sie mit einem Tuche, so hört man denselben Ton (vorausgesetzt, dass sie aus derselben Glassubstanz bestehen).

Dies kommt daher, dass in der Formel  $n = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{q}{\rho}}$  die Dicke nicht vorkommt. Also ist die Schwingungszahl und die davon abhängige Tonhöhe für beide Stäbe dieselbe.

Nimmt man aber zwei Glasröhren, von denen die eine doppelt so lang ist wie die andere, so gibt die kürzere einen Ton, der die Octave des Tones ist, den die längere gibt. Dann ist

$$n_1 = \frac{1}{2l_1} \sqrt{\frac{q}{\rho}} \quad \text{und} \quad n_{II} = \frac{1}{2l_{II}} \sqrt{\frac{q}{\rho}},$$

also

$$\frac{n_1}{n_{II}} = \frac{2l_{II}}{2l_1} = 2, \quad n_1 = 2n_{II}, \quad \text{da} \quad l_{II} = 2l_1 \quad \text{ist.}$$

Da  $c = 2n.l$  ist, so kann man diese Formel zur Bestimmung von  $c$  benutzen. Das  $l$  kann man messen, das  $n$  ist durch die Tonhöhe leicht zu bestimmen. Auf diese Weise fand Wertheim die Schallgeschwindigkeit

für Blei (gezogen, nicht gegossen) . . . . . 4,3  
wenn sie für Luft = . . . . . 1 ist.

Für Zinn . . . . . 7,5

„ Zink . . . . . 11,0

„ Kupfer . . . . . 11,2

„ Eisen und Stahl . . . . . 15,1

welches Letztere sehr gut mit unserem früher erhaltenen Resultat  $c = 14,87$  übereinstimmt.

„ Glas . . . . . 16

„ Fichte . . . . . 10,0

„ Eiche . . . . . 11,6

„ Tanne . . . . . 14

„ Rottanne . . . . . 11,0

„ Weisstanne . . . . . 11,8

Dass wir für Eisen und Tanne beinahe dasselbe  $c = \sqrt{\frac{q}{\rho}}$  haben, rührt daher, dass bei Eisen das  $q$  und  $\rho$  fast in demselben Verhältnisse grösser sind, wie bei der Tanne.

Auf diesem Wege kann man nun weiter auch den Elasticitäts-coefficienten bestimmen, wie dies vielfach angewandt worden ist.

Statt der früheren Formel

$$p = q\delta \quad \text{oder} \quad q = \frac{p}{\delta}$$

bedient man sich dann der Formel

$$c = \sqrt{\frac{q}{\rho}}, \quad \text{oder} \quad c^2 = \frac{q}{\rho}, \quad \text{oder} \quad q = \rho \cdot c^2.$$

Ist  $c$  bekannt, so findet man dann leicht  $q$ .

Dieser zweite Fall kommt am häufigsten vor.

3) Jetzt kommt der dritte Fall, wo das eine Ende des Stabes fest, das andere frei ist.

Ist der Stab am Ende  $x = 0$  befestigt,  
am Ende  $x = l$  frei,

so hat man die Grenzbedingungen:

$$\xi_{(x=0)} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}_{(x=l)} = 0.$$

Also

$$\begin{aligned} f(-ct) + F(+ct) &= 0 \quad \text{und} \\ f'(l-ct) + F'(l+ct) &= 0; \end{aligned}$$

wo  $ct$  nur positive Werte hat.

Setzen wir  $ct = z$ , so kommt statt dessen

$$\begin{aligned} f(-z) + F(+z) &= 0, \\ f'(l-z) + F'(l+z) &= 0. \end{aligned}$$

Letztere Gleichung integrirt, gibt

$$-f(l-z) + F(l+z) = C.$$

Aehnlich, wie im ersten Falle, findet man jetzt, dass die Functionen  $f$  und  $F$  für sämtliche, ihnen zukommende Argumente bekannt sind, sobald sie für die zwischen 0 und  $l$  liegenden Argumente bekannt sind. Zudem sind die Verschiebungen hier auch periodisch. Man hat nämlich

$$\begin{aligned} \gamma) \quad f(-A-2l) &= -F(A+2l) = -F(l+(A+l)) = -C - f(l-(A+l)) \\ &= -f(-A) - C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) \quad F(B+2l) &= F(l+(B+l)) = C + f(l-(B+l)) = C + f(-B) \\ &= -F(+B) + C. \end{aligned}$$

Daher hat man Folgendes:

Für den Punkt  $x$  ist zur Zeit  $t$

$$\xi_t = f(x - ct) + F(x + ct).$$

Für denselben Punkt ist zur Zeit  $t_1 = t + \tau$

$$\xi_{t_1} = f(x - ct - c\tau) + F(x + ct + c\tau).$$

Setzen wir  $c\tau = 2l$ , so wird

$$\begin{aligned} \xi_{t_1} &= f(x - ct - 2l) + F(x + ct + 2l) \\ &= -f(x - ct) - C - F(x + ct) + C \text{ (nach } \gamma \text{) und } \delta)) \\ &= -f(x - ct) - F(x + ct) = -\xi_t. \end{aligned}$$

Ein Teilchen, das zur Zeit  $t$  nach der positiven Richtung verschoben war, ist nach der Zeit  $\tau = \frac{2l}{c}$  d. i. zur  $t_1 = t + \tau$  um ebensoviele also nach der negativen Richtung hin verschoben. So hat man

$$\xi_t = -\xi_{t+\tau} = \xi_{t+2\tau} = -\xi_{t+3\tau} = \xi_{t+4\tau} = \dots$$

Nach der Zeit  $2\tau$  befinden sich alle Teilchen wieder in demselben Zustande. Hier hat man also dasselbe wie früher, nur dass hier die Dauer einer Schwingungsperiode  $= 2\tau$  ist, also das Doppelte beträgt, wie bei einem Stabe, der an beiden Enden frei ist.

Die Anzahl  $n$  der Schwingungen in der Zeiteinheit ist, da

$$2\tau = T = \frac{4l}{c} = 4l \sqrt{\frac{\rho}{q}} \text{ ist,}$$

21)

$$\text{hier } n = \frac{1}{4l} \cdot c = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{q}{\rho}},$$

also halb so gross, wie in den beiden früheren Fällen.

Hat man zwei gleich lange Stäbe von derselben Beschaffenheit, und ist der eine an beiden Enden frei, der andere am einen Ende fest, am anderen frei, so gibt der letztere einen Ton, der die tiefere Octave des Tones des anderen ist.

Hiermit wissen wir, dass die Schwingungen der Stäbe periodisch sind. Ueber den Verlauf derselben wissen wir sonst nichts; sondern in jedem einzelnen Falle müssen noch nähere Bestimmungen z. B. des Anfangszustandes hinzukommen.

Jetzt betrachten wir einige andere Fälle.

Wir wissen, dass eine Röhre, die mit einer Flüssigkeitssäule oder mit einer Luftsäule gefüllt ist, sich ebenso wie ein elastischer Stab verhält. Nur hat eben das  $c$  hier einen ganz anderen Wert.





$$P = q \cdot \mu \quad \text{oder} \quad \frac{P}{\mu} = q,$$

wo  $q$  den Elasticitätscoefficienten für die betreffende Flüssigkeit bedeutet.

Aus der Länge  $l$  wird alsdann  $l(1 - \mu)$ . Die Zusammendrückbarkeit ist experimentell zu bestimmen.

Wie verhält sich's mit der Dehnung?

Wegen der Stetigkeit der Kräfte müssen wir annehmen, dass, wenn Kräfte von einem gewissen Sinne aus durch Null hindurch im entgegengesetzten Sinne wirken, dass dann die sie darstellende Function continuirlich bleibt; und demgemäss haben wir die negative Dehnung oder Zusammendrückung absolut gleich der (durch dieselbe, nur im entgegengesetzten Sinne wirkenden, Kraft  $P$  hervorgebrachten) positiven Dehnung zu setzen.

Um einen festen Körper oder eine Flüssigkeit zu comprimiren, ist dieselbe Kraft erforderlich, wie umgekehrt, um die gleich grosse Ausdehnung zu bewirken (nur dass die Kraft in einem anderen Sinne zu nehmen ist). Sonach ist in unserem jetzigen Falle

$$-P = q(-\mu) = -q\mu$$

die erforderliche Zugkraft, um die Ausdehnung  $\mu$  zu bewirken.

Da nun  $q = \frac{P}{\mu}$  der Elasticitätscoefficient für eine Flüssigkeit ist, so haben wir für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in derselben

$$c = \sqrt{\frac{P}{\mu \varrho}} \quad . . . . . 22)$$

wo  $\varrho$  die Masse Flüssigkeit in der Volumeneinheit bezeichnet.

Für Wasser ist  $\mu = 0,0000476$ .

1 Kubikcentimeter Wasser wiegt 1 Gramm, 1 Kubikmeter Wasser also 1000.1000 Gramm oder 1000 Kilogramm.

Die in 1 Kubikmeter Wasser enthaltene Masse ist somit  $= \frac{1000}{9,809}$ , oder eine Kraft  $= \frac{1000}{9,809}$  Kilogr. erteilt einem Kubikmeter Wasser die Beschleunigung von 1 Meter.

Auf den Quadratmeter Flüssigkeitsoberfläche bezogen ist nun  $P = 10333$  Kilogr., (also auf 1 Quadratmeter bez.)  $q = \frac{10333}{0,0000476}$



## Fortpflanzung des Schalles in der Luft.

Bezeichnen wir das Volumen eines Luftquantums mit  $V$ , die Zusammendrückung mit  $-\delta V$ , dann ist die verhältnissmässige Zusammendrückung  $= -\frac{\delta V}{V}$ .

Bezeichnen wir die Druckänderung mit  $\partial p$ , so ist die Volumenänderung proportional der Druckänderung, und sonach

$$\partial p = -q \cdot \frac{\partial V}{V}$$

(eine Gleichung, die der früheren  $p = q\delta$  analog ist).

$q$  ist hier dasselbe, was bei festen Körpern der Elasticitätscoefficient ist.

Wir wollen nun statt des Volumens die Dichtigkeit einführen. Es ist

$$V = \frac{1}{\varrho};$$

also

$$\partial V = -\frac{\partial \varrho}{\varrho^2}, \quad \frac{\partial V}{V} = -\frac{\partial \varrho}{\varrho}.$$

Also

$$\partial p = q \cdot \frac{\partial \varrho}{\varrho}$$

und

$$q = \varrho \cdot \frac{\partial p}{\partial \varrho}.$$

Unsere Formel für die Schallgeschwindigkeit wird hiernach

$$c = \sqrt{\frac{q}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\varrho \cdot \frac{\partial p}{\partial \varrho}}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \varrho}}.$$

Newton wandte nun lediglich das Mariotte'sche Gesetz an, nämlich:

$$p \cdot V = p_1 \cdot V_1,$$

oder auch

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{\varrho_1}, \quad p = \frac{p_1}{\varrho_1} \cdot \varrho$$

$$\partial p = \frac{p_1}{\varrho_1} \cdot \partial \varrho.$$

Somit ist

$$\frac{\partial p}{p} = \frac{\partial \varrho}{\varrho}$$

oder

**Setzt man diesen Wert in die Formel für  $c$  ein, so kommt:**

Dieses Resultat stimmt nicht mit der Erfahrung überein; Laplace fand die Ursache dieser Differenz. Während der Compression wird Wärme erzeugt, welche wegen der grossen Geschwindigkeit der Schwingungen nicht so schnell an die Umgebung abgegeben werden kann; während der Verdünnung entsteht wieder Abkühlung. Jene Erwärmung bewirkt Vermehrung der Elasticität, und somit grössere Geschwindigkeit der Fortpflanzung.

**Hier nun also hätte Newton statt**

## setzen müssen

wo  $k$  das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen der Luft, resp. bei constantem Druck und bei constantem Volumen bezeichnet.

**und**

$$\partial p = p, \cdot \frac{k \varrho^{k-1} \partial \varrho}{\varrho,^k}.$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{k \cdot \partial \rho}{\rho},$$
$$\frac{\partial p}{\partial \varrho} = k \cdot \frac{p}{\varrho}.$$
$$c = \sqrt{k} \cdot \sqrt{\frac{p}{\rho}} \dots \dots \dots 23)$$

**(Zur Bestimmung von  $c$  ist also die Kenntniss von  $k$  erforderlich).**

Als diese Idee einmal ausgesprochen war, zweifelte Niemand mehr an der Richtigkeit derselben.

Umgekehrt kann man aus obiger Formel und den Beobachtungen die Grösse  $k$  auch bestimmen. Führen wir dies einmal aus.

Der Druck der Atmosphäre auf den Quadratmeter bezogen beträgt 10333 Kilogr.

Ein Kubikdecimeter oder ein Liter Luft (bei 0° C.) wiegt 1,293187 Gramm, also wiegt 1 Kubikmeter Luft 1,293187 Kilogramm.

Also ist die in einem Kubikmeter enthaltene Masse Luft

$$\varrho = \frac{1,293187}{9,809}.$$

Somit kommt nach Newton's Formel

$$c = \sqrt{\frac{p}{\varrho}} = \sqrt{\frac{10333 \cdot 9,809}{1,293187}} = 280^m.$$

Experimentell findet man hingegen

$$c = 332^m,5;$$

und da dies mit der Laplace'schen Formel übereinstimmen muss

$$\sqrt{k} \cdot \sqrt{\frac{p}{\varrho}} = 332,5;$$

mithin

$$332,5 = \sqrt{k} \cdot 280$$

und

$$k = \left(\frac{332,5}{280}\right)^2 = 1,410;$$

ein Resultat, welches sehr gut mit dem aus der mechanischen Wärmetheorie erhaltenen übereinstimmt.

Welchen Unterschied macht es auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, wenn ein anderer Druck, eine andere Temperatur stattfindet?

Es ist

$$p \cdot V = R \cdot T,$$

wo die Constante  $R$  sich bestimmt aus

$$p \cdot V_0 = R \cdot T_0,$$

also

$$R = \frac{p_0 V_0}{T_0}.$$



Betrachten wir einen unendlich schmalen Kegel, der in der Ruhelage die Länge  $r$  hat; dessen Spitze im Centrum liegt, und dessen Basis in der Kugelfläche liegt, die  $= r^2\pi$  ist. Durch die Kugelflächen, deren Radien bezüglich gleich  $r - \frac{\partial r}{2}$  und gleich  $r + \frac{\partial r}{2}$  sind, wird jener Kegel und seine Verlängerung in zwei Flächenstücken geschnitten, welche als Grundflächen zweier Kegel betrachtet werden können, die mit dem ersten Kegel Spitze und Richtung gemeinsam haben.

In einem späteren Momente hat die Basis des ersten Kegels eine Verschiebung erlitten, dann ist die Länge des Kegels  $= r + \xi$ , wo  $\xi = \varphi(r)$  positiv oder negativ ist, je nachdem die Verschiebung in der einen Richtung oder in der entgegengesetzten erfolgt ist. In diesem selbigen Momente werden die Längen der beiden anderen Kegel sein

$$r + \frac{\partial r}{2} + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{2} \quad \text{und}$$

$$r - \frac{\partial r}{2} + \xi - \frac{\partial \xi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{2}.$$

Der Längenunterschied dieser beiden Kegel, der ursprünglich  $= \partial r$  war, ist dann also  $= \partial r + \frac{\partial \xi}{\partial r} \cdot \partial r$ .

Das Stückchen  $\partial r$  hat sich dann also gedehnt im Verhältnisse von

$$\partial r : \partial r \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) = 1 : 1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}.$$

Diese Betrachtungen sind den früheren analog. Jetzt tritt ein Unterschied ein.

Um das Volumen eines Teilchens zu erhalten, multipliciren wir den mittleren Querschnitt desselben mit seiner Länge. Wir führen den körperlichen Winkel  $\hat{\sigma}$  des Kegels ein ( $\partial \sigma$  das Maass des körperlichen Winkels überhaupt, das Flächenelement für den Radius 1).

Für den Kegel, dessen Länge im Zustande der Ruhe  $= r$  war, ist das Flächenstückchen der Basis  $= r^2 \cdot \partial \sigma$ , folglich das Volumen des Körperteilchens, dass im Zustande der Ruhe die Differenz der beiden anderen Kegel war,  $= r^2 \cdot \partial \sigma \cdot \partial r$ . Nach der Verschiebung erhält man dafür das Volumen

$$(r + \xi)^2 \cdot \hat{\sigma} \cdot \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \partial r$$

oder



$$\left(1 + \frac{\xi}{r}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) \cdot r^2 \partial \sigma \partial r.$$

Die Entwicklung gibt, wenn wir die Verschiebung so klein annehmen, dass wir bloß erste Potenzen derselben zu berücksichtigen brauchen

$$\begin{aligned} &\left(1 + 2\frac{\xi}{r}\right) \cdot \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) \cdot r^2 \partial \sigma \partial r = \\ &\left(1 + 2\frac{\xi}{r} + \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) \cdot r^2 \partial \sigma \partial r. \end{aligned}$$

Die verhältnissmässige Zunahme des Volumens =  $v$  gesetzt, ist also

$$\begin{aligned} V : V_1 &= 1 : (1 + v) \\ &= 1 : \left(1 + 2\frac{\xi}{r} + \frac{\partial \xi}{\partial r}\right). \end{aligned}$$

Also

$$v = 2 \cdot \frac{\xi}{r} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \dots \dots \dots 25)$$

Bei unseren früheren Betrachtungen, wo nur Dehnung nach einer Seite (der Längsrichtung des Stabes, der Röhre) vorausgesetzt wurde, war  $v = \frac{\partial \xi}{\partial x}$  oder auch  $= \frac{\partial \xi}{\partial r}$ .

Der Druck, unter dem die Luft sich während der verschiedenen Schwingungsphasen befindet, ist eine Function von  $V$  oder auch von  $\varrho$  nach dem Mariotte'schen Gesetze. Es ist.

$$\frac{\partial p}{\partial \varrho} = \frac{p}{\varrho} = \frac{p_1}{\varrho_1},$$

also

$$p = \frac{p}{\varrho} \cdot \varrho = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot \varrho$$

und

$$p_1 = \frac{p_1}{\varrho_1} \cdot \varrho_1 = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot \varrho_1;$$

daher

$$p_1 = p + \frac{\partial p}{\partial \varrho} (\varrho_1 - \varrho).$$

Nun ist

$$\varrho = \frac{1}{V}, \text{ und } \varrho_1 = \frac{1}{V_1} = \frac{1}{V(1+v)}$$

Daher

$$\begin{aligned} \varrho_1 - \varrho &= \frac{1}{V(1+v)} - \frac{1}{V} \\ &= - \frac{v}{V(1+v)} = - \frac{v}{V} (1 - v + v^2 - \dots) = - \frac{v}{V}, \end{aligned}$$

da  $v$  sehr klein ist, oder auch  $= - \varrho \cdot v$ .

Also

$$p_1 = p - \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot \varrho v = p - \varrho \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot v.$$

Hier können wir  $p_1$  als laufenden Wert der Function betrachten,  $p$  als einen bestimmten Wert derselben, dem ein bestimmter Wert von  $\varrho$  entspricht. Dann sind in der letzten Formel nur  $p_1$  und  $v$  als veränderlich zu betrachten.

Jetzt kommt es darauf an, die bewegende Kraft zu suchen.

Denken wir uns wieder einen unendlich schmalen Kreiskegel mit der Winkelöffnung  $\partial\sigma$ .

Für die Ruhelage sei seine Länge  $=r$ , also seine Basis  $=r^2 \cdot \partial\sigma$ . Fügt man seiner Länge ein Stück  $\delta r$  hinzu, so entsteht ein neuer Kegel, dessen Basis  $= (r + \delta r)^2 \cdot \partial\sigma$  ist. Die Differenz dieser beiden Kegel ist ein Körperteilchen, ein abgestumpfter Kegel, auf dessen gesammte Oberfläche, wenn es eine Verschiebung erlitten hat, Kräfte wirken, die es in seine Ruhelage zurückzuführen streben.

Der Druck  $p_1$ , der an irgend einer Stelle des Raumes stattfindet, ist offenbar eine Function von  $r$ ; (da  $p_1$  eine Function von  $v$  ist, so ist auch  $r$  eine Function von  $v$ , und umgekehrt).

In Folge der Verschiebung  $\xi$  wird aus  $r$  offenbar  $(r + \xi)$ , also aus  $r^2 \partial\sigma$  wird  $(r + \xi)^2 \partial\sigma$ . Auf dem die dem Anfangspunkte (Centrum) zugewandte Grundfläche jenes abgestumpften Kegels wirkt, auf die Flächeneinheit bezogen, ein Druck  $p_1$ , der das Teilchen in der Richtung des Radius zu verschieben sucht.

Da die Grösse dieser Basis  $= (r + \xi)^2 \partial\sigma$  ist, so ist die auf sie wirkende Gesamtkraft gleich

$$p_1 \cdot (r + \xi)^2 \partial\sigma.$$

Die gegenüber liegende Basis des abgestumpften Kegels hat nun ebenfalls eine Verschiebung erlitten. Aus  $(r + \delta r)$  ist geworden die Länge

$(r + \delta r + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial r} \cdot \delta r)$ ; also ist die Grösse jener Basis nach der Verschiebung gleich

$$(r + \delta r + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial r} \cdot \delta r)^2 \partial\sigma.$$

Ihre Entfernung von der ersten Basis beträgt  $\delta r + \frac{\partial \xi}{\partial r} \cdot \delta r$ , also wirkt

hier, auf die Flächeneinheit bezogen, die Kraft  $p_1 + \frac{\partial p_1}{\partial r} (\delta r + \frac{\partial \xi}{\partial r} \delta r)$  oder, mit Vernachlässigung eines sehr kleinen Gliedes, der Druck



den Kräfte verschwinden, und nur ihre in der Richtung der Axe selbst wirkenden Bestandteile in Betracht kommen.

Die Summe dieser Bestandteile ist gleich der auf den Mantel des Kegelteilchens von allen Seiten her wirkenden Gesamtkraft, multiplicirt mit  $\epsilon$ .

Für diese Gesamtkraft selbst nehmen wir nur ihren mittleren Wert an.

An den Enden des abgestumpften Kegels, die resp. um  $(r + \xi)$  und  $(r + \xi + \delta r + \frac{\partial \xi}{\partial r} \delta r)$  vom Centrum abstehen, hat der Druck (auf die Flächeneinheit bezogen), bezüglich die Werte  $p_1$  und  $p_1 + \frac{\partial p_1}{\partial r} \cdot \delta r$ , also hat er (in der Entfernung  $(r + \xi + \frac{\delta r}{2} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\delta r}{2})$  vom Centrum) den mittleren Wert  $p_1 + \frac{\partial p_1}{\partial r} \cdot \frac{\delta r}{2}$ .

Diesen Wert haben wir mit dem Werte des Mantels unseres Kegelteilchens zu multipliciren, um die eben bezeichuete Gesamtkraft zu finden.

Die Seitenlinie unseres abgestumpften Kegels hat nun den Wert  $\delta r + \frac{\partial \xi}{\partial r} \cdot \delta r = \delta r (1 + \frac{\partial \xi}{\partial r})$ .

Die Radien seiner Grundflächen haben die Werte  $(r + \xi) \cdot \epsilon$  und  $(r + \xi + \delta r + \frac{\partial \xi}{\partial r} \delta r) \epsilon$ ; also ist der mittlere Radius  $= (r + \xi + \frac{\delta r}{2} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \cdot \frac{\delta r}{2}) \epsilon$ .

Sonach ist der Mantel des Kegelteilchens gleich

$$\delta r (1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}) (r + \xi + \frac{\delta r}{2} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \cdot \frac{\delta r}{2}) \epsilon \cdot 2\pi,$$

oder mit Weglassung höherer Potenzen gleich

$$\delta r (r + \xi) (1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}) \cdot 2\epsilon\pi.$$

Die auf den Mantel wirkende Gesamtkraft ist somit absolut

$$(p_1 + \frac{\partial p_1}{\partial r} \cdot \frac{\delta r}{2}) (r + \xi) (1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}) \cdot \delta r \cdot 2\epsilon\pi,$$

oder mit Vernachlässigung höherer Potenzen gleich

$$2p_1(r + \xi) \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) \delta r \cdot \varepsilon \pi,$$

Um die Summe der „der Axe des Kegels parallelen“ Bestandteile der seitlich wirkenden Kräfte zu erhalten, haben wir dies noch mit  $\varepsilon$  zu multipliciren. Dann kommt

$$2p_1 \cdot (r + \xi) \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) \delta r \cdot \varepsilon^2 \pi$$

oder

$$2p_1 \cdot (r + \xi) \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) \delta r \cdot \partial \sigma.$$

Addiren wir nun die drei Componenten, die resp. auf die beiden Grundflächen und den Mantel unseres Körperteilchens nach Richtung der Axe desselben wirken. so kommt

$$\begin{aligned} & p_1(r + \xi)^2 \cdot \partial \sigma \\ & - p_1(r + \xi)^2 \partial \sigma - \left[ 2p_1(r + \xi) \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) + (r + \xi)^2 \frac{\partial p_1}{\partial r} \right] \delta r \cdot \partial \sigma \\ & + 2p_1(r + \xi) \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) \delta r \cdot \partial \sigma. \end{aligned}$$

Hier hebt sich nun fast Alles auf, und als Kraft die das Körperteilchen in der Richtung des Radius zu verschieben sucht, bleibt nur

$$\begin{aligned} U &= - (r + \xi)^2 \frac{\partial p_1}{\partial r} \cdot \delta r \cdot \partial \sigma \\ &= - r^2 \left(1 + \frac{\xi}{r}\right)^2 \frac{\partial p_1}{\partial r} \cdot \delta r \cdot \partial \sigma. \end{aligned}$$

Da  $\frac{\xi}{r}$  (namentlich in einem beträchtlichen Abstände  $r$  vom Anfangspunkte) sehr klein ist, und gegen 1) vernachlässigt werden kann, so erhalten wir einfacher

$$U = - r^2 \cdot \frac{\partial p_1}{\partial r} \cdot \delta r \cdot \partial \sigma.$$

Wir hatten nun oben eine Gleichung abgeleitet

$$p_1 = p - \frac{\partial p_1}{\partial \varrho} \varrho \cdot v,$$

in welcher nur  $p_1$  und  $v$  veränderlich sind. Demnach kommt nach Differentiation nach  $r$

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = - \varrho \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial v}{\partial r};$$

und dies substituirt, kommt

$$U = r^2 \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \delta r \cdot \delta \sigma.$$

Das Volumen unseres Kegelteilchens  $V$  ist nun gleich

$$\left(1 + \frac{\xi}{r} + \frac{\delta r}{2r} + \dots\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) \cdot r^2 \delta r \delta \sigma$$

oder mit Vernachlässigung (der geringen Dehnung) und sehr kleiner Grösse gleich  $r^2 \delta r \delta \sigma$ ; also seine Masse

$$m = \rho V = \rho \cdot r^2 \delta r \delta \sigma.$$

Substituieren wir dies Alles in die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{U}{m},$$

so kommt

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{r^2 \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\xi v}{\partial r} \cdot \delta r \cdot \delta \sigma}{\rho \cdot r^2 \delta r \delta \sigma} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial r}.$$

Durch Differentiation kommt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

Erstere Gleichung mit 2, letztere mit  $r$  multiplicirt, dann beide addirt, erhalten wir

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( 2\xi + r \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial \rho} \left( 2 \frac{\partial v}{\partial r} + r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right).$$

Nun ist (nach 25))

$$2\xi + r \frac{\partial \xi}{\partial r} = rv$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \\ &= \frac{\partial v}{\partial r} + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (v) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( v + r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) = \frac{\partial^2 (rv)}{\partial r^2}. \end{aligned}$$

Hiernach wird unsere Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 (rv)}{\partial t^2} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 (rv)}{\partial r^2},$$

oder, wenn wir

$$\frac{\partial p}{\partial \varrho} = \frac{p}{\varrho} = c^2$$

setzen

$$\frac{\partial^2(rv)}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2(rv)}{\partial r^2} \dots \dots \dots 26)$$

Das allgemeine Integral dieser partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$rv = f(r - ct) + F(r + ct) \dots \dots \dots 27)$$

Vergleichen wir dieses mit dem früheren Resultat über die Bewegung der Luft in einer Röhre. Dort hatten wir

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad v = \xi' = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Durch Differentiation kommt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass wir dort  $v$  hatten, während wir hier  $rv$  haben.

Dort hatten wir (mit Aenderung der dortigen Schreibweise

$$\xi = f(x - ct) + F(x + ct) = \int f(x - ct) \partial x + \int F(x + ct) \partial x$$

und

$$v = f(x - ct) + F(x + ct).$$

Hier haben wir

$$(rv) = f(r - ct) + F(r + ct).$$

Aehnlich wie dort, finden wir auch hier, dass an einer in Bewegung befindlichen Stelle die Bewegung aus zwei Teilen resultirt, von denen der eine in der Richtung des Radius in einem gewissen Sinne, der andere im entgegengesetzten Sinne über das System fortwandert, was Alles rings um das Centrum statthat; dass die eine Schallwelle in der Richtung des Radius vom Centrum aus fortwandert, die andere in der entgegengesetzten Richtung auf das Centrum zu. Wir brauchen blos die erstere zu betrachten. Während bei der Bewegung der Luft in einer Röhre die Gleichung

$$v_1 = f(x - ct)$$

zu erkennen gibt, dass die Verschiebungen und Dehnungen  $\xi_1$  und  $r_1$  unverändert und mit der constanten Geschwindigkeit  $c$  in der positiven Richtung über das ganze System fortwandern, zeigt hier die Gleichung

$$rv_1 = f(r - ct)$$

oder

$$v_1 = \frac{f(r - ct)}{r},$$

dass in der positiven (von Centrum ausgehenden) Richtung ein constanter Wert von  $rv_1$  mit der constanten Geschwindigkeit  $c$  über das ganze System sich hinzieht; dass somit die Dehnung dem Radius umgekehrt proportional sein wird. Je grösser der Radius, desto geringer die Verdichtungen und Verdünnungen. Dies Letztere ist der Unterschied gegen das Frühere; sonst finden auch hier dieselben Beziehungen statt.

Die Intensität des Schalles ist nun proportional dem Quadrate des Verdichtungs- oder Verdünnungs-Maximums (oder auch proportional dem Quadrate des Verschiebungs-Maximums). Demnach erhalten wir als Endresultat den Satz:

In einem freien, nach allen Seiten ausgedehnten Raume findet die Fortpflanzung des Schalles ebenso und mit derselben Geschwindigkeit statt, wie in einer Röhre, nur mit dem Unterschiede, dass bei ersterer Ausbreitung die Intensität nach dem umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Radius abnimmt.

---



## XII.

Wälzung eines cylindrisch begrenzten Körpers  
auf Horizontalebene.

Von

R. Hoppe.

Es soll die Bewegung eines Körpers berechnet werden, der zum Teil von einer cylindrischen Fläche beliebigen Querschnitts, im übrigen beliebig begrenzt ist, eine horizontale Ebene ausschliesslich mit dem cylindrischen Teile berührt und nicht daran gleitet, bei beliebig verteilter Masse und allein wirkender Schwere. Hieran schliesst sich die Untersuchung tautochronischer Oscillation.

Der Schwerpunkt der Walze sei Anfang der am Körper festen  $xyz$ , die  $z$  Axe in der Richtung der Cylinderseite. Bezeichne  $m$  die Masse,  $mn^2$  das Trägheitsmoment um die  $z$  Axe,  $\tau$  den Richtungswinkel der Tangente der Cylinderbasis gegen die  $x$  Axe, so dass

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos \tau; \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \sin \tau$$

und die Gleichung der Tangente

$$X = x + U \cos \tau; \quad Y = y + U \sin \tau$$

wird, wenn  $xy$  ein Punkt der Cylinderfläche ist.

Sind ferner  $x_1 y_1 z_1$  die im Raume festen Coordinaten, die Horizontalebene, auf welcher die Walze liegt,  $x_1 z_1$  Ebene, die  $x_1 y_1$  Ebene zusammenfallend mit der  $xy$  Ebene,  $x_0 y_0$  die Coordinaten des Schwerpunkts, so sind die Coordinatenrelationen:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + x \cos \tau + y \sin \tau \\ y_1 &= y_0 - x \sin \tau + y \cos \tau \end{aligned} \qquad z_1 = z \qquad (1)$$

Wir wollen nun  $xyz$ ,  $x_1y_1z_1$  auf den Berührungspunkt der Cylinderbasis, dagegen  $x_2y_2z_2$  im Sinne der  $xy$ ,  $x_3y_3z_3$  im Sinne der  $x_1y_1z_1$  auf ein Element des Körpers anwenden. Dann gelten die Gl. (1) noch allgemein, und man hat:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_0 + x_2 \cos \tau + y_2 \sin \tau \\ y_3 &= y_0 - x_2 \sin \tau + y_2 \cos \tau \\ z_3 &= z_2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$y_1 = 0; \quad z_1 = z = 0$$

und damit keine Gleitung der Walze auf der berührenden Ebene statthabe:

$$x_1 = s$$

wo  $s$  den Bogen der Cylinderbasis bis zum Berührungspunkt bezeichnet, und der Anfang der  $x_1$  dem der  $s$  entsprechend gewählt ist. Subtrahirt man nach Einsetzung dieser Werte die Gl. (1) (2), so kommt:

$$\begin{aligned} x_3 &= s + (x_2 - x) \cos \tau + (y_2 - y) \sin \tau \\ y_3 &= -(x_2 - x) \sin \tau + (y_2 - y) \cos \tau \end{aligned}$$

zwei Gleichungen, welche die Wälzung geometrisch bestimmen. Darin sind  $s$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $\tau$  Functionen der Zeit allein,  $x_2$ ,  $y_2$  variiren mit dem Körperelement allein,  $x_3$ ,  $y_3$  mit beiden.

Zur dynamischen Bestimmung reicht die Gleichung der lebendigen Kraft hin:

$$\int \frac{\partial x_3^2 + \partial y_3^2}{\partial t^2} \partial m = 2cm - 2g \int y_3 \partial m$$

Man findet:

$$\begin{aligned} \partial x_3 &= \{-(x_2 - x) \sin \tau + (y_2 - y) \cos \tau\} \partial \tau \\ \partial y_3 &= -\{(x_2 - x) \cos \tau + (y_2 - y) \sin \tau\} \partial \tau \\ \partial x_3^2 + \partial y_3^2 &= \{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2\} \partial \tau^2 \end{aligned}$$

Ist dann  $mn^2$  das Trägheitsmoment der Walze für die  $z$  Axe, so hat man:

$$\int x_2 \partial m = 0; \quad \int y_2 \partial m = 0; \quad \int (x_2^2 + y_2^2) \partial m = mn^2$$

daher:

$$\begin{aligned} \int (\partial x_3^2 + \partial y_3^2) \partial m &= \{mn^2 + m(x^2 + y^2)\} \partial \tau^2 \\ \int y_3 \partial m &= m(x \sin \tau - y \cos \tau) \end{aligned}$$

Dies eingeführt giebt:

$$(n^2 + x^2 + y^2) \frac{\partial \tau^2}{\partial t^2} = 2c - 2g(x \sin \tau - y \cos \tau)$$

Sei nun

$$u = x \sin \tau - y \cos \tau$$

dann wird

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = u' = x \cos \tau + y \sin \tau$$

$$u^2 + u'^2 = x^2 + y^2$$

daher

$$\partial t = \frac{\partial \tau}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n^2 + u^2 + u'^2}{c - gu}} \quad (3)$$

Zur Anwendung ist  $u$  in  $\tau$  darzustellen. Die Gleichung der Cylinderbasis sei

$$f(x, y) = 0$$

woraus durch Differentiation:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cos \tau + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \tau = 0$$

In beiden Gleichungen hat man zu substituieren:

$$\left. \begin{aligned} x &= u' \cos \tau + u \sin \tau \\ y &= u' \sin \tau - u \cos \tau \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

dann sind durch sie die Werte von  $u$  und  $u'$  bestimmt:

Ist z. B. die Cylinderbasis ein Kreis, und man lässt die  $x$  Axe durch den Mittelpunkt gehen, so lautet die Gleichung nebst ihrer Derivirten:

$$(x - e)^2 + y^2 = a^2; \quad (x - e) \cos \tau + y \sin \tau = 0$$

Letztere giebt unmittelbar:

$$u' = e \cos \tau$$

woraus zugleich:

$$u = e \sin \tau + \text{const.}$$

Erstere Gleichung fügt dann nur noch den Wert  $a$  für die Const. hinzu, so dass

$$u = a + e \sin \tau$$

und Gl. (3) wird:

$$\partial t = \frac{\partial \tau}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n^2 + a^2 + e^2 + 2a \sin \tau}{c - ga - ge \sin \tau}}$$

mithin  $t$  elliptisches Integral in  $\tau$ . Die weitere Gestaltung ist von Bender in T. LX. p. 113. vollzogen.

Fernere Beispiele ergeben sich aus der Annahme

$$u = b\tau^k$$

Die Bewegungsgleichung wird:

$$\partial t = \frac{\partial \tau}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n^2 + b^2 \tau^{2k} + 4kb^2 \tau^{2k-2}}{c - gb\tau^k}}$$

die Gleichungen der Cylinderbasis:

$$x = b\tau^{k-1}(k \cos \tau + \tau \sin \tau)$$

$$y = b\tau^{k-1}(k \sin \tau - \tau \cos \tau)$$

Letztere ist demnach eine Spirale, insbesondere für  $k = 1$  eine Kreisevolvente; doch ist der Schwerpunkt der Walze ein bestimmter Punkt, im genannten Falle der Mittelpunkt. Elliptisches Integral wird  $t$  allgemein für  $k = 1$  und  $k = 2$ . Bei specieller Bestimmung des Trägheitsmoments kann das Integral für  $k = 2$  und  $k = \frac{1}{2}$  noch einfachere Formen annehmen. Sei

$$k = 2; \quad n = 16b^2$$

dann findet man:

$$t = \frac{(8gb + c)\sigma - c \sin \sigma \cos \sigma}{2g \sqrt{2gb}}; \quad \tau = \sin \sigma \sqrt{\frac{c}{b}}$$

und die Oscillationsdauer:

$$T = 2R \frac{8gb + c}{g \sqrt{2gb}}$$

Sei ferner

$$k = \frac{1}{2}; \quad n = 2 \sqrt{2} \cdot b^2$$

dann giebt die Berechnung:

$$t = \frac{2 \sqrt{2}}{g^4 b^3} \sqrt{c - gb \sqrt{\tau}} \times \\ \left\{ \frac{c}{35} (4c + gb \sqrt{\tau})^2 + \frac{g^2 b^2 \tau}{7} (c + gb \sqrt{\tau}) + \frac{\sqrt{2}}{3} g^2 b^2 (2c + gb \sqrt{\tau}) \right\}$$

Ist  $u$  beliebige ganze Function 2. Grades von  $\tau$ , so erhält man nur den Fall  $k = 2$  wieder, mit andern Werten von  $n$  und  $c$ .

Untersucht man den Fall einer tautochronisch oscillirenden Walze, so ergibt sich zugleich der Grenzwert der Oscillationsdauer für den Fall nicht tautochronischer Gestalt. Die Gleichgewichtslage wird bestimmt durch  $u' = 0$ , wo der Radiusvector normal zur Tangente ist. Sie ist stabil, wenn  $u$  ein Minimum, labil, wenn es ein Maximum ist. Ihr mögen die Werte

$$\tau = \alpha; \quad u = a$$

entsprechen. Setzt man

$$\frac{c}{g} - a = e^2; \quad \frac{c}{g} - u = e^2 \cos^2 \sigma$$

so wird

$$\partial t = \frac{\partial \tau}{\sqrt{2g e \cos \sigma}} \sqrt{u + u^2 + u'^2}$$

Giebt es nun einen Punkt der Nullgeschwindigkeit, so tritt diese ein für  $\sigma = R, 3R, \text{etc.}$ , während in der Gleichgewichtslage  $\sigma = 0, 2R, \text{etc.}$  ist; daher ist die Dauer einer vollen Schwingung:

$$T = \frac{4}{e\sqrt{2g}} \int_0^R \frac{\partial \sigma}{\sigma' \cos \sigma} \sqrt{n^2 + u^2 + u'^2}$$

Im allgemeinen lässt sich  $u$  nach ganzen positiven Potenzen von  $\tau - \alpha$  entwickeln. Dies vorausgesetzt, ist der Coefficient von  $\tau - \alpha$  null; der von  $(\tau - \alpha)^2$  muss, wenn er nicht null ist, positiv sein, so dass

$$e^2 \sin^2 \sigma = h^2 (\tau - \alpha)^2 + A(\tau - \alpha)^3 + B(\tau - \alpha)^4 + \dots$$

wird, woraus wieder folgt, dass sich  $\tau - \alpha$ , daher auch  $\frac{\partial t}{\partial \sigma}$  nach ganzen positiven Potenzen von  $e \sin \sigma$  entwickeln lässt, und letzteres die Form hat:

$$\frac{\partial t}{\partial \sigma} = A_1 + B_1 e \sin \sigma + C_1 (e \sin \sigma)^2 + \dots$$

Da nun die Schwingungsweite durch  $e$  bestimmt wird, welches allein in  $e$  enthalten ist, so kann  $T$  nur dann unabhängig von ersterer sein, wenn  $B_1, C_1, \dots$  in infin. null sind. Dann ist aber auch  $\frac{\partial t}{\partial \sigma}$  constant und hat denjenigen Wert, welcher auch ohne Tautochronismus einer unendlich kleinen Elongation als Grenzwert entsprechen würde.

Um letztern zu bestimmen, hat man für unendlich kleines  $e$

$$\lim \sqrt{n^2 + u^2 + u'^2} = \sqrt{n^2 + a^2}; \quad \lim \frac{\tau - \alpha}{e} = \frac{\sin \sigma}{h}$$

daher

$$\lim (e \sigma' \cos \sigma) = h$$

$$\lim T = \frac{4R}{h} \sqrt{\frac{n^2 + a^2}{2g}} = \frac{4R}{h} \sqrt{\frac{J}{2gm}} \quad (5)$$

wo  $J$  das Trägheitsmoment der Walze für diejenige Cylinderseite als **Axe** bedeutet, welche in der Gleichgewichtslage den horizontalen Boden berührt, während  $h$ , und mit ihm umgekehrt proportional  $T$ , jeden Wert haben kann.

Es zeigte sich ferner, dass  $\tau$  und  $\frac{\partial t}{\partial \sigma}$  Functionen von  $e \sin \sigma$  sind, ausserdem weder von  $e$  noch von  $\sigma$  abhängig. Soll daher  $T$  unabhängig von  $e$  sein, so darf auch  $\frac{\partial t}{\partial \sigma}$  nicht  $\sigma$  enthalten. Die Bedingung tautochronischer Oscillation ist daher, wenn  $b$  eine beliebige bezeichnet:

$$\frac{\sqrt{n^2 + u^2 + u'^2}}{e \sigma' \cos \sigma} = 2\sqrt{b}$$

oder, wenn man

$$u = a + \varrho; \quad (e \sin \sigma)^2 = \varrho$$

setzt:

$$\{n^2 + (a + \varrho)^2\} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \varrho}\right)^2 + 1 = \frac{b}{\varrho}$$

woraus:

$$\partial \tau = \partial \varrho \sqrt{\frac{b - \varrho}{\varrho \{n^2 + (a + \varrho)^2\}}}$$

Zur Reduction des elliptischen Integrals  $\tau$  setzen wir

$$a + b = \pi \operatorname{tg}(\alpha + \beta); \quad a - b = \pi \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$$

$$\varrho = \frac{\pi \sin \beta (1 - \pi \cot \alpha \cot \beta)}{\cos \alpha \cos(\alpha - \beta) (1 + \pi)}$$

dann wird

$$\partial \tau = - \sqrt{\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}} \frac{\partial \pi}{\sin \alpha (1 + \pi)} \frac{1 + \pi \cot \alpha \cot \beta}{\sqrt{(1 - \pi^2 \cot^2 \alpha \cot^2 \beta)(1 + \pi^2 \cot^2 \alpha)}}$$

Ferner sei der Modul der  $\Theta$  Functionen bestimmt durch

$$\sin \beta = \left(\frac{HR}{\Theta R}\right)^2; \quad \cos \beta = \left(\frac{\Theta 0}{\Theta R}\right)^2 \quad (10)$$

das constante Argument  $\gamma$  durch

$$\sin \alpha = \frac{\Theta 0}{\Theta R} \frac{H i \gamma}{i H(i \gamma + R)}; \quad \cos \alpha = \frac{HR}{\Theta R} \frac{\Theta(i \gamma + R)}{H(i \gamma + R)} \quad (11)$$

und das variable Argument  $\omega$  durch

$$\pi = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \frac{\Theta 0}{HR} \frac{H(\omega + R)}{\Theta \omega} = \frac{H i \gamma H(\omega + R)}{i \Theta(i \gamma + R) \Theta \omega} \quad (12)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\mu = \Theta 0 HR \frac{H(i \gamma + R)}{\Theta i \gamma} + \frac{\Theta^2 R H i \gamma \Theta(i \gamma + R) + \Theta i \gamma H'(i \gamma + R)}{i \Theta i \gamma H(i \gamma + R)} \quad (13)$$

so ergiebt die Integration von (9):

$$\tau = \mu \omega + \frac{i}{2} \log \frac{\Theta(\omega + i \gamma)}{\Theta(\omega - i \gamma)} + \operatorname{arctg} \frac{H(i \gamma + R) H \omega}{\Theta i \gamma \Theta(i \gamma + R)} \quad (14)$$

woraus:

$$\left. \begin{aligned} e^{i \tau} &= e^{i \mu \omega} \frac{\Theta i \gamma \Theta(\omega + R) + i H(i \gamma + R) H \omega}{\Theta R \Theta(\omega + i \gamma)} \\ e^{-i \tau} &= e^{-i \mu \omega} \frac{\Theta i \gamma \Theta(\omega + R) - i H(i \gamma + R) H \omega}{\Theta R \Theta(\omega - i \gamma)} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ier ist die Constante in  $\tau$  so bestimmt, dass  $\tau$  mit  $\omega$  und  $\varrho$ , also der Gleichgewichtslage, verschwindet. Ferner wird nach obiger nführung (10), (11), (12), wenn man der Kürze wegen

$$N = \frac{nH(i\gamma + R)[\Theta\Theta(i\gamma + R) + iHRHi\gamma][HR\Theta\omega - \Theta\Theta H(\omega + R)]}{\Theta i\gamma \Theta\Theta HR[\Theta(i\gamma + R)\Theta\omega - iHi\gamma H(\omega + R)]} \quad (16)$$

etzt,

$$\varrho = N \frac{H(i\gamma + R)}{\Theta i\gamma}; \quad \varrho' = N \frac{\Theta(\omega + R)}{H\omega} \quad (17)$$

Jetzt ist die Gleichung der Basis der cylindrischen Oberfläche r tautochrone Oscillation:

$$\begin{aligned} x + iy &= \{\varrho' - i(a + \varrho)\}e^{i\tau} \\ &= \left\{ N \frac{H(i\gamma + R)H\omega - i\Theta i\gamma \Theta(\omega + R)}{\Theta i\gamma H\omega} - ia \right\} e^{i\tau} \end{aligned} \quad (18)$$

Gl. (15) (16), und

$$T = 4R \sqrt{\frac{2b}{g}} = 8R \frac{H(i\gamma + R)}{\Theta i\gamma} \sqrt{\frac{n}{g}} \quad (19)$$

ist die Dauer einer vollen Schwingung.

$$\frac{\sqrt{n^2 + u^2 + u'^2}}{e \sigma' \cos \sigma} = 2\sqrt{b}$$

oder, wenn man

$$u = a + \varrho; \quad (e \sin \sigma)^2 = \varrho$$

setzt:

$$\{n^2 + (a + \varrho)^2\} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \varrho}\right)^2 + 1 = \frac{b}{\varrho}$$

woraus:

$$\partial \tau = \partial \varrho \sqrt{\frac{b - \varrho}{\varrho \{n^2 + (a + \varrho)^2\}}} \quad (6)$$

Zur Reduction des elliptischen Integrals  $\tau$  setzen wir

$$a + b = n \operatorname{tg}(\alpha + \beta); \quad a = n \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \quad (7)$$

$$\varrho = \frac{n \sin \beta (1 - \pi \cot \alpha \cot \beta)}{\cos \alpha \cos(\alpha - \beta) (1 + \pi)} \quad (8)$$

dann wird

$$\partial \tau = - \sqrt{\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}} \frac{\partial \pi}{\sin \alpha (1 + \pi)} \frac{1 + \pi \cot \alpha \cot \beta}{\sqrt{(1 - \pi^2 \cot^2 \alpha \cot^2 \beta)(1 + \pi^2 \cot^2 \alpha)}} \quad (9)$$

Ferner sei der Modul der  $\Theta$  Functionen bestimmt durch

$$\sin \beta = \left(\frac{HR}{\Theta R}\right)^2; \quad \cos \beta = \left(\frac{\Theta \Theta}{\Theta R}\right)^2 \quad (10)$$

das constante Argument  $\gamma$  durch

$$\sin \alpha = \frac{\Theta \Theta}{\Theta R} \frac{Hi\gamma}{iH(i\gamma + R)}; \quad \cos \alpha = \frac{HR}{\Theta R} \frac{\Theta(i\gamma + R)}{H(i\gamma + R)} \quad (11)$$

und das variable Argument  $\omega$  durch

$$\pi = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \frac{\Theta \Theta}{HR} \frac{H(\omega + R)}{\Theta \omega} = \frac{Hi\gamma H(\omega + R)}{i\Theta(i\gamma + R)\Theta \omega} \quad (12)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\mu = \Theta \Theta HR \frac{H(i\gamma + R)}{\Theta i\gamma} + \frac{\Theta^2 R Hi\gamma \Theta(i\gamma + R) + \Theta i\gamma H'(i\gamma + R)}{i\Theta i\gamma H(i\gamma + R)} \quad (13)$$

so ergibt die Integration von (9):

$$\tau = \mu \omega + \frac{i}{2} \log \frac{\Theta(\omega + i\gamma)}{\Theta(\omega - i\gamma)} + \operatorname{arctg} \frac{H(i\gamma + R)H\omega}{\Theta i\gamma \Theta(i\gamma + R)} \quad (14)$$

woraus:

$$\left. \begin{aligned} e^{i\tau} &= e^{i\mu\omega} \frac{\Theta i\gamma \Theta(\omega + R) + iH(i\gamma + R)H\omega}{\Theta R \Theta(\omega + i\gamma)} \\ e^{-i\tau} &= e^{-i\mu\omega} \frac{\Theta i\gamma \Theta(\omega + R) - iH(i\gamma + R)H\omega}{\Theta R \Theta(\omega - i\gamma)} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$



Hier ist die Constante in  $\tau$  so bestimmt, dass  $\tau$  mit  $\omega$  und  $\varrho$ , also in der Gleichgewichtslage, verschwindet. Ferner wird nach obiger Einführung (10), (11), (12), wenn man der Kürze wegen

$$N = \frac{nH(i\gamma + R)[\Theta\Theta(i\gamma + R) + iHRHi\gamma][HR\Theta\omega - \Theta\Theta H(\omega + R)]}{\Theta i\gamma \Theta\Theta HR[\Theta(i\gamma + R)\Theta\omega - iHi\gamma H(\omega + R)]} \quad (16)$$

setzt,

$$\varrho = N \frac{H(i\gamma + R)}{\Theta i\gamma}; \quad \varrho' = N \frac{\Theta(\omega + R)}{H\omega} \quad (17)$$

Jetzt ist die Gleichung der Basis der cylindrischen Oberfläche für tautochronische Oscillation:

$$\begin{aligned} x + iy &= \{\varrho' - i(a + \varrho)\} e^{i\tau} \\ &= \left\{ N \frac{H(i\gamma + R)H\omega - i\Theta i\gamma \Theta(\omega + R)}{\Theta i\gamma H\omega} - ia \right\} e^{i\tau} \end{aligned} \quad (18)$$

s. Gl. (15) (16), und

$$T = 4R \sqrt{\frac{2b}{g}} = 8R \frac{H(i\gamma + R)}{\Theta i\gamma} \sqrt{\frac{n}{g}} \quad (19)$$

ist die Dauer einer vollen Schwingung.

## XIII.

Ein Beitrag zur Theorie der merkwürdigen  
Punkte im Dreieck.

Von

Herrn Dr. J. Lange.

1.  $ABC$  sei das Mittendreieck von  $A''B''C''$ , und  $A'B'C'$  dasjenige von  $ABC$ ; dann sind diese Dreiecke zu je zweien ähnlich und ähnlich liegend für den gemeinsamen Schwerpunkt  $S$  als Aehnlichkeitspunkt, und zwar  $A''B''C''$  und  $ABC$ ,  $ABC$  und  $A'B'C'$  mit  $S$  als innerem Aehnlichkeitspunkt und dem Aehnlichkeitsverhältnis 2:1,  $A''B''C''$  und  $A'B'C'$  mit  $S$  als äusserem Aehnlichkeitspunkt und dem Aehnlichkeitsverhältnis 4:1. Irgend drei entsprechende Punkte  $X''XX'$  in diesem dreifachen System liegen mit  $S$  in einer graden Linie harmonisch,  $X'$  in der Mitte von  $X''X$ , denn die Punktpaare  $XX'$  und  $SX''$  trennen sich gegenseitig und wegen  $SX'' = 2SX = 4SX'$  ist  $\frac{1}{SX''} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{SX'} - \frac{1}{SX} \right)$  und  $X'X'' = X'X$ . Drei entsprechende Punkte sind z. B. die Mittelpunkte der Umkreise, daher gilt in Anwendung auf  $ABC$  der Satz:

I. Höhenschnitt, Schwerpunkt, Mittelpunkt des Umkreises und derjenige des Feuerbachschen Kreises liegen in einer graden Linie harmonisch: Eulersche Linie.

2. Es seien ferner  $OO_aO_bO_c$  die Mittelpunkte der Berührungskreise für  $ABC$ , von denen jeder dem Dreieck  $ABC$  als eingeschrieben, die drei andern im Gegensatz hierzu als angeschrieben betrachtet werden sollen;  $U_aU_bU_c$ ,  $V_aV_bV_c$ ,  $W_aW_bW_c$  ihre Berührungspunkte auf den Seiten  $abc$ . Drückt man die Abschnitte  $BU_a = BW_a$ ,  $BU_a = BW_a$  etc. in bekannter Weise aus durch  $s$ ,  $s - a$ ,  $s - b$ ,  $s - c$ , so erkennt man leicht, wie die Berührungspunkte achtmal zu je dreien sich so ordnen lassen, dass das Product ihrer Abstandsverhältnisse von den Ecken der zugehörigen Seite  $= -1$  ist, woraus dann mit Hülfe der Umkehrung des Ceva folgt:







$$J'' = \Delta - \frac{\Delta}{2r} \left( \frac{\varrho\varrho_a}{h_a} + \frac{\varrho\varrho_b}{h_b} + \frac{\varrho\varrho_c}{h_c} \right) = \Delta - \frac{\Delta}{2r} (2r - \varrho) = \Delta \frac{\varrho}{2r}$$

$$\begin{aligned} J_a'' &= \mathfrak{U}\mathfrak{B}_cC + \mathfrak{U}\mathfrak{C}_bB + \mathfrak{B}_c\mathfrak{C}_bA - \Delta \\ &= \Delta \left( \frac{s(s-c)}{ab} + \frac{s(s-b)}{ac} + \frac{(s-b)(s-c)}{bc} \right) - \Delta \\ &= \frac{\Delta}{2r} \left( \frac{\varrho\varrho_a}{h_a} + \frac{\varrho_a\varrho_c}{h_b} + \frac{\varrho_a\varrho_b}{h_c} \right) - \Delta = \frac{\Delta}{2r} (2r + \varrho_a) = \Delta \frac{\varrho_a}{2r} \end{aligned}$$

Demnach ergeben sich folgende beachtenswerte Relationen

$$\text{XIII.} \quad J = J'' = \Delta \frac{\varrho}{2r}$$

$$J_a = J_a'' = \Delta \frac{\varrho_a}{2r}$$

$$J_b = J_b'' = \Delta \frac{\varrho_b}{2r}$$

$$J_c = J_c'' = \Delta \frac{\varrho_c}{2r}$$

$$J : J_a : J_b : J_c = \varrho : \varrho_a : \varrho_b : \varrho_c = J'' : J_a'' : J_b'' : J_c''$$

$$J_a + J_b + J_c - J = 2\Delta = J_a'' + J_b'' + J_c'' - J''$$

12. Die Dreiecke  $F$  und  $J$  sind ähnlich, die Radien ihrer Umkreise sind  $2r$  und  $\varrho$ , folglich

$$F : J = 4r^2 : \varrho^2$$

da aber nach XIII.

$$J : \Delta = \varrho : 2r$$

so folgt

$$\text{XIV.} \quad F : \Delta = \Delta : J = 2r : \varrho$$

$$F_a : \Delta = \Delta : J_a = 2r : \varrho_a$$

$$F_b : \Delta = \Delta : J_b = 2r : \varrho_b$$

$$F_c : \Delta = \Delta : J_c = 2r : \varrho_c$$

Berlin, 1. December 1880.













3) für  $z$  ein  $\frac{\alpha c + b}{di} + \frac{cf(\alpha)iz}{2(\alpha c + b)d}$  wo  $f\alpha = a + 2b\alpha + c\alpha^2$ . Das Integral geht dann über in

$$\frac{-f\alpha^{n+1}}{2(\alpha c + b)} \int_0^1 (1-z)^n dz = -\varphi(\alpha),$$

wo  $\varphi(\alpha) = \frac{f(\alpha)^{n+1}}{2(n+1)(\alpha c + b)}$ . Das Integral  $\int_\alpha^\beta (a + 2bz + cz^2)^n$  ist also

in erster Annäherung  $= \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) \pm \varepsilon i \sqrt{\frac{\pi}{n} \frac{d^{2n+1}}{c^{n+1}}}$ .  $\varepsilon$  ist 0, wenn

die reellen Teile von  $\frac{\alpha c + b}{di}$  und  $\frac{\beta c + b}{di}$  beide dasselbe Zeichen haben,

sonst ist  $\varepsilon = 1$ . Das obere Zeichen gilt, wenn der reelle Teil von  $\frac{\alpha c + b}{di}$  negativ, der von  $\frac{\beta c + b}{di}$  positiv ist. Im entgegengesetzten

Falle gilt das untere Zeichen. Eine kleine Abänderung erleidet die Formel, wenn  $\alpha c + b$  oder  $\beta c + b$  verschwinden, d. h. wenn ein Endpunkt des Integrationsweges in den Verzweigungspunkt fällt. Von den

3 Gliedern  $\varphi(\alpha)$ ,  $\varphi(\beta)$  und  $\varepsilon i \sqrt{\frac{\pi}{n} \frac{d^{2n+1}}{c^{n+1}}}$  behält man schliesslich nur das bei, welches den grössten abs. Betrag hat.

Als zweites Beispiel wählen wir

$$5) \int_\alpha^\beta (z + a_1)^{n_1} (z + a_2)^{n_2} dz;$$

es sollen  $n_1$  und  $n_2$  gleichzeitig unendlich werden, doch so, dass  $\frac{n_1}{n_2}$  endlich bleibt. Die Substitution  $-a_1 + (a_1 - a_2)z$  statt  $z$  verwandelt das Integral in

$$6) \int_{\frac{\alpha + a_1}{a_1 - a_2}}^{\frac{\beta + a_1}{a_1 - a_2}} z^{n_1} (1-z)^{n_2} dz.$$

Der Verzweigungspunkt liegt bei  $z = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$ ; 0 und 1 sind die Null-

punkte. Sind  $\frac{\alpha + a_1}{a_1 - a_2}$  und  $\frac{\beta + a_1}{a_1 - a_2}$  reell, so findet man den Wert des Integrals sofort. Im allgemeinen Falle setzen wir  $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ,  $z - 1 = \rho(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ , so geht die Gleichung der Steigungscurve  $U - CV$  über in













findet man dann das Resultat. Sind  $\nu$  und  $n$  unendlich gross, dagegen  $n - \nu$  endlich, so findet man aus 12), indem man den Integrationsweg beibehält:

$$P_\nu^n(x) = \frac{\pi C \Pi(2\nu) \cdot (\sqrt{x^2 - 1})^\nu x^{n-\nu}}{2^{2\nu} \Pi(\nu) \Pi(\nu)};$$

der Zahlfactor ist nahezu  $= 1$ , also

$$13) \quad P_\nu^n(x) = (\sqrt{x^2 - 1})^\nu x^{n-\nu},$$

wenn  $n - \nu$  endlich positiv oder negativ,  $x$  einen positiven reellen Teil hat, und  $n$  und  $\nu$  unendlich gross sind.

Für die zugeordnete Function zweiter Art  $Q_\nu^n(x)$  gibt Herr Heine für den Fall, dass  $\nu$  endlich,  $n$  unendlich ist, den Näherungsausdruck

$$Q_\nu^n(x) = (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} (2\xi)^{n+1} \cdot \text{Mod } \xi < 1.$$

Denselben Wert können wir leicht aus dem F. Neumann'schen Integral

$$14) \quad 2Q_\nu^n(x) = \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^\nu \Pi(2n + 2)}{2^{2n+1} \Pi(n) \Pi(n+1)} \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - y^2)^n dy}{(x - y)^{n+\nu+1}}$$

herleiten. Ist  $x^2$  nicht positiv und  $< 1$ , so ist über die reelle Achse zu integrieren. Setzen wir  $y = 2z - 1$ , so geht das Integral über in

$$14a) \quad \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^\nu \Pi(2n + 2) 2^{n-\nu}}{\Pi(n) \Pi(n+1)} \int_0^1 \left( \frac{\frac{z(1-z)}{\frac{1+x}{2} - z}}{\left( \frac{1+x}{2} - z \right)} \right)^n \frac{dz}{\left( \frac{1+x}{2} - z \right)^{\nu+1}},$$

welches dem unter 9) analog ist. Ist wieder

$$fz = \frac{z(1-z)}{\frac{1+x}{2} - z},$$

so verschwindet  $f'z$  bei

$$z_0 = \frac{1+x \pm \sqrt{x^2 - 1}}{2}.$$

Durch die Substitution 10) für  $x$  findet man, dass man über den Punkt

$$z_0 = \frac{1+x - \sqrt{x^2 - 1}}{2}$$

integrieren muss; da der Unstetigkeitspunkt und der Punkt  $\frac{1+x + \sqrt{x^2 - 1}}{2}$  auf derselben Seite der reellen Achse liegen. Setzen wir



## XV.

Sur des polynômes de deux variables analogues  
aux polynômes de Jacobi.

Par

**P. Appell.**

En se proposant de généraliser les polynômes de Legendre, M. Hermite a été conduit à s'occuper des polynômes

$$(1) \quad \frac{\partial^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}$$

(voir Comptes Rendus t. LX. et Journal de Crelle t. 64.); depuis, ces polynômes ont été étudiés par Didon (Annales de l'Ecole Normale t. V, année 1868).

De même que les polynômes de Legendre se rattachent à la série hypergéométrique de Gauss, les polynômes (1) de M. Hermite se rattachent aux séries hypergéométriques de deux variables que j'ai considérées (voir Comptes Rendus t. XC et XCI). Mais, l'on sait que, de la série hypergéométrique de Gauss, Jacobi a déduit des polynômes plus généraux que ceux de Legendre et comprenant ceux-ci comme cas particulier (voir Journal de Crelle t. 56). Je me propose ici d'étudier et de rattacher aux séries hypergéométriques de deux variables les polynômes

$$(2) \quad A_{m,n} = x^{-a} y^{-b} (1-x-y)^c \frac{\partial^{m+n} [x^{m+a} y^{n+b} (1-x-y)^{m+n+c}]}{\partial x^m \partial y^n}$$

qui sont, comme on le voit, analogues aux polynômes de Jacobi. Dans cette équation (2) les lettres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  désignent des nombres quelconques,  $m$  et  $n$  des entiers positifs;  $A_{m,n}$  est alors un polynôme en  $x$  et  $y$  de degré  $m+n$ .

I. Tout d'abord, voici comment on peut former deux équations différentielles linéaires du second ordre aux dérivées partielles auxquelles satisfait le polynôme  $A_{m,n}$ .

Posons, pour abréger,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} R = x^{m+a} y^{n+b} (1-x-y)^{m+n+c} \\ S = x^{m+a} y^{n+b} (1-x-y)^{m+n+c-1} \\ U = x^{-a} y^{-b} \frac{\partial^{m+n} [x^{m+a} y^{n+b} (1-x-y)^{m+n+c}]}{\partial x^m \partial y^n} \\ T = x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} - (m+n+c) U \end{array} \right.$$

et soit

$$V = x^{-a} y^{-b} \frac{\partial^{m+n} [x^{m+a} y^{n+b} (z-x-y)^{m+n+c}]}{\partial x^m \partial y^n}$$

Cette fonction  $V$  est une fonction homogène de degré  $m+n+c$  des trois variables  $x, y, z$ ; elle se réduit à  $U$  lorsqu'on y fait  $z=1$ . En appliquant à  $V$  le théorème des fonction homogènes, on a

$$(4) \quad x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} + z \frac{\partial V}{\partial z} = (m+n+c) V$$

or

$$\frac{\partial V}{\partial z} = x^{-a} y^{-b} (m+n+c) \frac{\partial^{m+n} [x^{m+a} y^{n+b} (z-x-y)^{m+n+c-1}]}{\partial x^m \partial y^n}$$

alors, si dans l'identité (4) on fait  $z=1$ , et si l'on remarque que  $V$  se réduit à  $U$  et  $\frac{\partial V}{\partial z}$  à  $(m+n+c) x^{-a} y^{-b} \frac{\partial^{m+n} S}{\partial x^m \partial y^n}$ , on voit que cette identité devient

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + (m+n+c) x^{-a} y^{-b} \frac{\partial^{m+n} S}{\partial x^m \partial y^n} = (m+n+c) U$$

ou enfin

$$(5) \quad (m+n+c) x^{-a} y^{-b} \frac{\partial^{m+n} S}{\partial x^m \partial y^n} = -T$$

Cela posé, de l'expression (3) de  $R$  on tire par la différentiation

$$x \frac{\partial R}{\partial x} - (m+a) R + x(m+n+c) S = 0$$

Différentions le premier membre de cette dernière relation  $m+1$  fois par rapport à  $x$ ,  $n$  fois par rapport à  $y$ ; nous obtenons

$$(6) \quad x \frac{\partial^{m+n+2} R}{\partial x^{m+2} \partial y^n} - (a-1) \frac{\partial^{m+n+1} R}{\partial x^{m+1} \partial y^n} + x(m+n+c) \frac{\partial^{m+n+1} S}{\partial x^{m+1} \partial y^n} \\ + (m+1)(m+n+c) \frac{\partial^{m+n} S}{\partial x^m \partial y^n} = 0$$

Or, on a

$$\frac{\partial^{m+n} R}{\partial x^m \partial y^n} = x^a y^b U$$

et, d'après (5)

$$(m+n+c) \frac{\partial^{m+n} S}{\partial x^m \partial y^n} = -x^a y^b T$$

l'équation (6) devient donc

$$x \frac{\partial^2 [x^a y^b U]}{\partial x^2} - (a-1) \frac{\partial [x^a y^b U]}{\partial x} - x \frac{\partial [x^a y^b T]}{\partial x} \\ - (m+1)x^a y^b T = 0$$

ou bien, en effectuant les différentiations et réduisant

$$x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (a+1) \frac{\partial U}{\partial x} - x \frac{\partial T}{\partial x} - (a+m+1)T = 0$$

Enfin, en remplaçant  $T$  par sa valeur (3), on obtient, pour  $U$ , l'équation différentielle

$$(7) \quad (x-x^2) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + [a+1-(a-n-c+2)x] \frac{\partial U}{\partial x} \\ - (a+m+1)y \frac{\partial U}{\partial y} + (a+m+1)(m+n+c)U = 0$$

Par raison de symétrie, on peut écrire immédiatement une seconde équation différentielle

$$(7') \quad (y-y^2) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - xy \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + [b+1-(b-m-c+2)y] \frac{\partial U}{\partial y} \\ - (b+n+1)x \frac{\partial U}{\partial x} + (b+n+1)(m+n+c)U = 0$$

Comme on a

$$U = (1-x-y)^c A_{m,n}$$

on déduit facilement des équations (7) et (7') deux équations différentielles auxquelles satisfait le polynôme  $A_{m,n}$ . Mais il est inutile d'écrire ici ces deux équations.

II. Les équations (7) et (7') permettent de ramener le polynôme  $A_{m,n}$  aux séries hypergéométriques de deux variables. A cet



On a alors

$$F_2[-(m+n+c), a+m+1, b+n+1, a+1, b+1, x, y] = (1-x-y)^{m+n+c} F_2\left[-(m+n+c), -m, -n, a+1, b+1, \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right]$$

d'où

$$(10) \quad A_{m,n} = H. (1-x-y)^{m+n} F_2\left[-(m+n+c), -m, -n, a+1, b+1, \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right]$$

formule dans laquelle le second membre est un polynôme de degré  $m+n$ , car les éléments  $\beta, \beta'$  ont des valeurs entières négatives.

III. Supposons maintenant

$$a+1 > 0, \quad b+1 > 0, \quad c+1 > 0$$

et désignons par  $B$  un polynôme quelconque en  $x$  et  $y$ . Soit

$$(11) \quad I = \iint x^a y^b (1-x-y)^c A_{m,n} \cdot B \cdot dx dy$$

l'intégrale double étant étendue aux valeurs réelles de  $x$  et  $y$  telles que

$$(12) \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 1-x-y \geq 0$$

En remplaçant le polynôme  $A_{m,n}$  par son expression (2), on a

$$I = \iint \frac{\partial^{m+n} [x^{m+a} y^{n+b} (1-x-y)^{m+n+c}]}{\partial x^m \partial y^n} \cdot B \cdot dx dy$$

Or, la formule générale d'intégration par parties

$$\int X \frac{d^p Y}{dz^p} dz = X \frac{d^{p-1} Y}{dz^{p-1}} - \frac{dX}{dz} \cdot \frac{d^{p-2} Y}{dz^{p-2}} + \dots + (-1)^p \int Y \frac{d^p X}{dz^p} dz$$

appliquée successivement aux variables  $x$  et  $y$  dans l'intégrale  $I$ , montre que cette intégrale peut se mettre sous la forme

$$(13) \quad I = (-1)^{m+n} \iint x^{m+a} y^{n+b} (1-x-y)^{m+n+c} \frac{\partial^{m+n} B}{\partial x^m \partial y^n} dx dy$$

car tous les termes intégrés s'annulent aux limites (12). Il résulte de cette forme (13) de l'intégrale  $I$  que, si  $B$  est un polynôme de degré moindre que  $m+n$  ou bien un polynôme de degré  $m+n$  ne contenant pas de terme en  $x^m y^n$ , l'intégrale  $I$  est égale à zéro; en effet dans ces deux cas  $\frac{\partial^{m+n} B}{\partial x^m \partial y^n} = 0$ .





$$(17) \quad \iint F(x, y) \cdot x^a y^b (1-x-y)^c dx dy = \\ \lambda_{k,0} I_{k,0}^{\mu,\nu} + \lambda_{k-1,1} I_{k-1,1}^{\mu,\nu} + \dots + \lambda_{k-p,p} I_{k-p,p}^{\mu,\nu} + \dots + \lambda_{0,k} I_{0,k}^{\mu,\nu}$$

Les entiers  $\mu$  et  $\nu$  étant assujettis à la seule condition  $\mu + \nu = k$ , on pourra leur donner  $(k+1)$  systèmes de valeurs qui fourniront  $(k+1)$  équations telles que (17). De ces  $(k+1)$  équations on tirera les  $(k+1)$  coefficients

$$\lambda_{k,0}, \lambda_{k-1,1}, \dots, \lambda_{k-p,p}, \dots, \lambda_{0,k}$$

Voici une autre méthode pour déterminer ces mêmes coefficients  $\lambda_{m,n}$  du développement (16). Considérons des polynômes  $B_{m,n}$  de degré  $m+n$  définis de la façon suivante: soit

$$(18) \quad B_{m,n} = \sum_{i=0}^{m+n} \alpha_i A_{m+n-i,i}$$

les  $(m+n+1)$  coefficients  $\alpha_i$  étant déterminés par ces conditions que, dans le second membre de l'équation (18), le coefficient de  $x^m y^n$  soit égal à l'unité et les coefficients de tous les autres termes de degré  $m+n$  égaux à zéro; ce qui donne  $(m+n+1)$  équations du premier degré pour déterminer les  $(m+n+1)$  coefficients  $\alpha_i$ .

Alors si l'on fait

$$K_{m,n}^{\mu,\nu} = \iint x^a y^b (1-x-y)^c A_{m,n} B_{\mu,\nu} dx dy$$

l'intégration étant étendue aux limites (13), on voit immédiatement, d'après les propriétés des intégrales précédentes  $I_{m,n}^{\mu,\nu}$ , que l'on a

$$K_{m,n}^{\mu,\nu} = 0$$

si  $m+n > \mu+\nu$ . Mais, si l'on suppose  $m+n = \mu+\nu$ , on a d'après la forme (13) de l'intégrale (11)

$$K_{m,n}^{\mu,\nu} = (-1)^{m+n} \iint x^{m+a} y^{n+b} (1-x-y)^{m+n+c} \frac{\partial^{m+n} B_{\mu,\nu}}{\partial x^m \partial y^n} dx dy$$

Or, dans le polynôme  $B_{\mu,\nu}$  il n'y a qu'un terme de degré  $m+n$  à savoir le terme  $x^\mu y^\nu$ ; si donc on n'a pas  $m = \mu$ ,  $n = \nu$ , on a

$$K_{m,n}^{\mu,\nu} = 0$$

même lorsque  $m+n = \mu+\nu$ . Lorsque

$$m = \mu, \quad n = \nu$$

le terme  $\frac{\partial^{m+n} B_{\mu,\nu}}{\partial x^m \partial y^n}$  devient  $\frac{\partial^{m+n} B_{m,n}}{\partial x^m \partial y^n}$  c'est à dire  $1.2\dots m.1.2\dots n$ , car dans  $B_{m,n}$  le coefficient de  $x^m y^n$  est l'unité. On a donc

$$K_{m,n}^{m,n} = \Gamma(m+1)\Gamma(n+1) \frac{\Gamma(m+a+1)\Gamma(n+b+1)\Gamma(m+n+c+1)}{\Gamma(2m+2n+a+b+c+3)}$$

Alors, pour déterminer les coefficients  $\lambda_{m,n}$  du développement (16), multiplions les deux membres de (16) par

$$x^a y^b (1-x-y)^c B_{m,n} dx dy$$

et intégrons entre les limites (12). Dans le second membre tous les termes sont nuls excepté le terme qui a pour coefficient  $\lambda_{m,n}$ , et l'on a

$$\iint F(x, y) \cdot x^a y^b (1-x-y)^c B_{m,n} dx dy = \lambda_{m,n} K_{m,n}^{m,n}$$

d'où l'on tire  $\lambda_{m,n}$ .

En supposant, dans tout ce qui précède,  $c = 0$ , on obtient des formules un peu plus simples que j'ai indiquées sans démonstration dans le tome XC des Comptes Rendus p. 731.

Dijon, le 26 octobre 1880.

## XVI.

# Ueber einen speciellen Fall des Apollonischen Tactionsproblems.

Von

K. E. Hoffmann.

## § 1.

In allen einem und demselben Kreise einbeschriebenen Dreiecken von gleicher Basis ist das Verhältniß der Linie, welche die Spitze  $A$  des Dreiecks mit dem Halbierungspunkte  $D$  des zur Basis  $BC$  gehörigen Bogens verbindet, zur Summe oder Differenz der Seiten  $AB$  und  $AC$  constant, je nachdem die Punkte  $A$  und  $D$  auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite von  $BC$  liegen.

Thes. I.  $A$  und  $D$  liegen auf verschiedenen Seiten von  $BC$ :

$$(AB + AC) : AD = \text{const.}$$

II.  $A$  und  $D_1$  liegen auf derselben Seite von  $BC$ :

$$(AB - AC) : AD_1 = \text{const.}$$

Bew. I. (Fig. 1). Da  $\text{arc. } BD = CD$ , ist Wkl.  $BAD = CAD = DBE$ ; ausserdem ist Wkl.  $ABE = ADC$ ; daher Dreieck  $ABE$  ähnlich  $ACD$  und

$$AB : AD = BE : CD = BE : BD.$$

Da ferner Wkl.  $ADB = ACE$  und Wkl.  $BAD = CAE$ , ist Dreieck  $ABD$  ähnlich  $ACE$ ; daher:

$$AC : AD = CE : BD.$$



































Variation von  $\varphi$  allein eine Rotation des Körpers um die Verticale im Berührungspunkt darstellt. Dann hat man die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} x_5 - x_4 &= x_6 \cos \varphi - y_6 \sin \varphi \\ y_5 - y_4 &= x_6 \sin \varphi + y_6 \cos \varphi \\ z_5 &= z_6 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Zur Bestimmung von  $x_4, y_4$  wenden wir die Gl. (3) auf den benachbarten Flächenpunkt  $P'$  mit den Coordinaten

$$x_1 = x + \partial x, \quad y_1 = y + \partial y, \quad z_1 = z + \partial z$$

an. Da dieser vom consecutiven Berührungspunkt  $P''$ , wie oben gezeigt, nur in 2. Ordnung absteht, so wird

$$x_5 = x_4 + \partial x_4, \quad y_5 = y_4 + \partial y_4$$

und man hat nach (3) mit Reduction von  $x_6, y_6$ :

$$\left. \begin{aligned} \partial x_4 &= (p_1 \partial x + q_1 \partial y + r_1 \partial z) \cos \varphi - (p_2 \partial x + q_2 \partial y + r_2 \partial z) \sin \varphi \\ \partial y_4 &= (p_1 \partial x + q_1 \partial y + r_1 \partial z) \sin \varphi + (p_2 \partial x + q_2 \partial y + r_2 \partial z) \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Differentiirt man jetzt die Gl. (3) und addirt die Werte von  $\partial x_4, \partial y_4$ , so kommt:

$$\left. \begin{aligned} \partial x_5 &= \partial M \cos \varphi - \partial N \sin \varphi \\ \partial y_5 &= \partial M \sin \varphi + \partial N \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} \partial M &= (x_1 - x) \partial p_1 + (y_1 - y) \partial q_1 + (z_1 - z) \partial r_1 - y_6 \partial \varphi \\ \partial N &= (x_1 - x) \partial p_2 + (y_1 - y) \partial q_2 + (z_1 - z) \partial r_2 + x_6 \partial \varphi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

gesetzt ist, und wegen  $p \partial x + q \partial y + r \partial z = 0$  sich hinzufügen lässt:

$$\partial z_5 = (x_1 - x) \partial p + (y_1 - y) \partial q + (z_1 - z) \partial r \quad (7)$$

Diese Gleichungen gelten sowol für die actuellen Veränderungen in der Bewegung als auch für die willkürlichen Variationen, wo  $\delta$  statt  $\partial$  zu schreiben ist.

Bezeichnet der Accent die Differentialquotienten nach der Zeit, und  $\gamma$  die Schwere der Masseneinheit, so ist nach dem Alembert-schen Princip:

$$\int \{x_5'' \delta x_5 + y_5'' \delta y_5 + (z_5'' + \gamma) \delta z_5\} \delta m = 0$$

oder nach (5):

$$\int \{(M'' + N' \varphi') \delta M + (N'' - M' \varphi') \delta N + (z_5'' + \gamma) \delta z_5\} \delta m = 0 \quad (8)$$

Ebenso reducirt sich die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\int (x_5'^2 + y_5'^2 + z_5'^2 + 2\gamma z_5) \delta m = \text{const.}$$

auf



$$M'' + N'\varphi' = -x_6[(R-\varphi)'^2 + Q'^2] + y_6[(R-\varphi)'' + P'Q'] \\ + z_6[-Q'' + P'(R-2\varphi)'] - V(R-\varphi)'$$

$$N'' - M'\varphi' = x_6[-(R-\varphi)'' + P'Q'] - y_6[(R-\varphi)'^2 + P'^2] \\ + z_6[P'' + Q'(R-2\varphi)'] + U(R-\varphi)$$

Zur Abkürzung sei

$$\lambda = \frac{1}{m} \int (y_6^2 + z_6^2) \partial m; \quad \mu = \frac{1}{m} \int (x_6^2 + z_6^2) \partial m;$$

$$\nu = \frac{1}{m} \int (x_6^2 + y_6^2) \partial m$$

$$\pi = -\frac{1}{m} \int y_6 z_6 \partial m; \quad \varrho = -\frac{1}{m} \int z_6 x_6 \partial m; \quad \sigma = -\frac{1}{m} \int x_6 y_6 \partial m$$

Führt man die erhaltenen Werte in die Gl. (12) (9) ein, so kommt:

$$\lambda(P'' - Q'\varphi') + (\mu - \nu)Q'(R-\varphi)' + \pi[(R-\varphi)'^2 - Q'^2] \quad (15) \\ + \varrho[(R-\varphi)'' - P'Q'] + \sigma(Q'' + P'R') + U_1 = 0$$

$$\mu(Q'' + P'\varphi') + (\nu - \lambda)P'(R-\varphi)' + \pi[(R-\varphi)'' + P'Q'] \\ + \varrho[P'^2 - (R-\varphi)'^2] + \sigma(P'' - Q'R') + V_1 = 0$$

$$\nu(R-\varphi)'' + (\lambda - \mu)P'Q' + \pi[Q'' - P'(R-2\varphi)'] \\ + \varrho[P'' + Q'(R-2\varphi)'] + \sigma(Q'^2 - P'^2) + W_1 = 0$$

$$\lambda P'^2 + \mu Q'^2 + \nu(R-\varphi)'^2 + 2\pi Q'(R-\varphi)' + 2\varrho P'(R-\varphi)' \\ + 2\sigma P'Q' + 2K = \text{const.}$$

wo

$$U_1 = \frac{1}{m} \int \{-y_6(VP' - UQ' + \gamma) + z_6 U(R-\varphi)'\}$$

$$V_1 = \frac{1}{m} \int \{z_6 V(R-\varphi)' + x_6(VP' - UQ' + \gamma)\} \partial m$$

$$W_1 = -\frac{1}{m} \int (x_6 U + y_6 V)(R-\varphi)' \partial m$$

$$K = \frac{\gamma}{m} \int z_6 \partial m$$

In diesen Gleichungen ist die Wahl der Axensysteme der  $x_1 y_1 z_1$  und  $x_5 y_5$ , sowie die Bestimmungsform der Oberfläche verbunden mit der Wahl der  $x_6, y_6$  Axen zu freier Verfügung gelassen. Jetzt, wo die Werte der eingeführten Grössen entwickelt darzustellen sind, nehmen wir fürs erste die Hauptträgheitsachsen zu Axen der  $x_1 y_1 z_1$  und setzen die Hauptträgheitsmomente

$$\int (y_1^2 + z_1^2) \partial m = Am; \quad \int (z_1^2 + x_1^2) \partial m = Bm; \quad \int (x_1^2 + y_1^2) \partial m = Cm$$



$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \kappa$$

so wird

$$x_2 = \frac{\kappa}{\sqrt{e}} \frac{\partial \kappa}{\partial u}; \quad y_2 = \frac{\kappa}{\sqrt{g}} \frac{\partial \kappa}{\partial v}$$

$$U = \sqrt{e} \cdot u'; \quad V = \sqrt{g} \cdot v'$$

$$U_1 = \frac{\kappa}{\sqrt{g}} \frac{\partial \kappa}{\partial v} (Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 + \gamma) \\ + z_2 u' \left\{ \frac{1}{2\sqrt{g}} \left( \frac{\partial e}{\partial v} u' - \frac{\partial g}{\partial u} v' \right) + \sqrt{e} \cdot \varphi' \right\}$$

$$V_1 = z_2 v' \left\{ \frac{1}{2\sqrt{e}} \left( \frac{\partial e}{\partial v} u' - \frac{\partial g}{\partial u} v' \right) + \sqrt{g} \cdot \varphi' \right. \\ \left. - \frac{\kappa}{\sqrt{e}} \frac{\partial \kappa}{\partial u} (Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 + \gamma) \right\}$$

$$W_1 = \kappa \kappa' \left\{ \frac{1}{2\sqrt{eg}} \left( \frac{\partial g}{\partial u} v' - \frac{\partial e}{\partial v} u' \right) - \varphi' \right\}$$

Bezeichnet  $\frac{\partial \omega}{\partial \sigma}$  die Krümmung der Berührungcurve auf der Oberfläche, so ist

$$Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = \omega's'$$

Durch die Wahl des Parametersystems lässt sich noch manche Vereinfachung erreichen. Für orthogonal geodätische Systeme erhält man  $e = 1$ , und, wenn  $h \partial u \partial v$  das Flächenelement bezeichnet,  $g = h^2$ . Hier wird

$$P' = \frac{Fu' + Gv'}{h}; \quad Q' = -(Eu' + Fv'); \quad R' = \frac{\partial h}{\partial u} v'$$

$$U_1 = \frac{\kappa}{h} \frac{\partial \kappa}{\partial v} (\omega's' + \gamma) - z_2 u' \left( \frac{\partial h}{\partial u} v' - \varphi' \right)$$

$$V_1 = -\kappa \frac{\partial \kappa}{\partial u} (\omega's' + \gamma) - z_0 h v' \left( \frac{\partial h}{\partial u} v' - \varphi' \right)$$

$$W_1 = \kappa \kappa' \left( \frac{\partial h}{\partial u} v' - \varphi' \right)$$

Die Form der Differentialgleichungen ist stets:

$$T_1 u'' + T_2 v'' + T_3 \varphi'' + T_4 u'^2 + T_5 u'v' + T_6 v'^2 + (T_7 u' + T_8 v') \varphi' + T_9 \varphi'^2 \\ = \gamma T_{10}$$

In der Gleichung der lebendigen Kraft fallen die 3 ersten Terme weg. Ohne ihre Integration in Angriff zu nehmen, betrachten wir sie als Basis der Untersuchung mannichfaltiger Fragen, deren einige im folgenden behandelt werden sollen.





Lässt man durch stetige Deformation den Kegel in eine beliebige Fläche übergehen, so kann das constante Verhältniss  $\frac{\partial R}{\partial \varphi} = +1$  nicht in  $-1$  übergehen, wenn nicht im ganzen Zeitraum der Bewegung  $\partial \varphi = 0$  wird, d. i. für cylindrische Wälzung, die man bei der Deformation vermeiden kann. Folglich ist allgemein  $\partial(R - \varphi) = 0$  die Bedingung, unter der keine Rotation um die Normale stattfindet, und  $(R - \varphi)'$  der Ausdruck der Rotationsgeschwindigkeit.

Soll eine Bewegung ohne Rotation stattfinden, so müssen  $u, v$  die 3 folgenden aus (15) für  $\varphi' = R'$  hervorgehenden Gleichungen erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(P'' - Q'R') + \sigma(Q'' + P'R') - \varrho P'Q' - \pi Q'^2 + Wy_2 &= 0 \\ \sigma(P'' - Q'R') + \mu(Q'' + P'R') + \varrho P'^2 + \pi P'Q' - Wr_2 &= 0 \\ \varrho(P'' - Q'R') + \pi(Q'' + P'R') - \sigma P'^2 + (\lambda - \mu)P'Q' + \sigma Q'^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

wo

$$W = VP' - UQ' + \gamma = \sqrt{g}P'v' - \sqrt{e}Q'u' + \gamma$$

gesetzt ist. Aus (18) ergibt sich:

$$u' = -\frac{\sqrt{g}FP' + \sqrt{e}GQ'}{H}; \quad v' = \frac{\sqrt{g}EP' + \sqrt{e}FQ'}{H}$$

hiernach wird

$$W = \frac{gEP'^2 + 2hFP'Q' + eGQ'^2}{H} + \gamma \quad (20)$$

wo zur Abkürzung

$$H = EG - F^2$$

gesetzt ist. Eliminirt man  $P''$  und  $Q''$  zwischen den Gl. (19), so erhält man:

$$\left| \begin{array}{ccc} \lambda \sigma & -\varrho P'Q' & -\pi Q'^2 + y_2 W \\ \sigma \mu & \varrho P'^2 + \pi P'Q' & -x_2 W \\ \varrho \pi - \sigma P'^2 + (\lambda - \mu)P'Q' + \sigma Q'^2 & & \end{array} \right| = 0 \quad (21)$$

eine Gleichung von der Form:

$$\lambda_1 P'^2 + 2\sigma_1 P'Q' + \mu_1 Q'^2 = 2\gamma K_1$$

von derselben wie die der lebendigen Kraft:

$$\lambda P'^2 + 2\sigma P'Q' + \mu Q'^2 = 2\gamma K \quad (22)$$

Setzt man

$$Q' = \kappa P'$$

und eliminirt  $P'$ , so kommt:



$$\begin{aligned}
& + \{ \lambda \mu - \varrho^2 - 3\sigma^2 + 2\kappa(\lambda - \mu)\sigma + \kappa^2(\pi^2 + 3\sigma^2 - \lambda\mu) \} (U_0 y_2 + V_0 x_2) \\
& + W_0 \{ (V_0 x_2 - U_0 y_2)(\varrho x_2 + \pi y_2) + [(U_0 x_2 - V_0 y_2)\sigma + U_0 \mu y_2 - V_0 \lambda x_2] z_2 \\
& \qquad \qquad \qquad - U_0 \pi x_2 + V_0 \varrho x_2 \} = 0
\end{aligned}$$

Hier ist

$$W_0 = V_0 - \kappa U_0 + \frac{\gamma}{P' z_2}$$

oder, da nach Gl. (22)

$$P'^2(\lambda + 2\kappa\sigma + \kappa^2\mu) = 2\gamma z_2$$

ist, nach Elimination von  $P'$

$$W_0 = V_0 - \kappa U_0 + \frac{\lambda + 2\kappa\sigma + \kappa^2\mu}{2z_2}$$

Daher ist die gefundene Gleichung (24) von der Form:

$$L_0 + L_1 \kappa + L_2 \kappa^2 + L_3 \kappa^3 = 0$$

und giebt, verbunden mit Gl. (23), welche die Form

$$M_0 + M_1 \kappa + M_2 \kappa^2 = 0$$

hat:

$$\begin{vmatrix}
L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & 0 \\
0 & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 \\
M_0 & M_1 & M_2 & 0 & 0 \\
0 & M_0 & M_1 & M_2 & 0 \\
0 & 0 & M_0 & M_1 & M_2
\end{vmatrix} = 0$$

worin nur die primitiven  $u, v$  enthalten sind.

Hiermit ist die Bahn des Berührungspunkts auf der Oberfläche, und dadurch die ganze Bewegung des Körpers geometrisch, d. i. ohne Rücksicht auf die Zeit, bestimmt. Die Einführung in die Differentialgleichungen würde dann identisch zu erfüllende Gleichungen ergeben, welche entweder durch Relationen der Constanten befriedigt werden könnten, oder den Beweis der Uunmöglichkeit einer Bewegung ohne Rotation um die Verticale liefern würden.

### §. 3. Permanente Bewegung.

Der Körper sei bezüglich seiner Oberfläche und Massenverteilung Rotationskörper. Letzteres setzt nur voraus, dass seine Rotationsaxe Hauptträgheitsaxe, und, wenn diese  $z$  Axe,  $A = B$  sei.

Die Gleichungen der Oberfläche lassen sich schreiben:

$$x = h \cos v; \quad y = h \sin v \quad (25)$$



Hiervon machen wir specielle Anwendung auf den Fall, wo die Berührungcurve einer der Parallelkreise der Oberfläche ist. Die Bedingung einer solchen Bewegung ist ein constantes  $\alpha$ . Da hier auch  $\tau$ ,  $h$  und  $z$  constant sind, so reduciren sich die 3 Gleichungen auf

$$\begin{aligned} (C + h^2)v'' - [C \cos \tau + h(z \sin \tau + h \cos \tau)]\varphi'' &= 0 \\ h\alpha v'' - [A \sin \tau + z(z \sin \tau + h \cos \tau)]\varphi'' &= 0 \\ C \sin \tau - h(z \cos \tau - h \sin \tau)]v'\varphi' & \\ + [(A - C) \sin \tau \cos \tau + (z \sin \tau + h \cos \tau)(z \cos \tau - h \sin \tau)]\varphi'^2 & \\ = \gamma(z \sin \tau + h \cos \tau) & \end{aligned} \quad (30)$$

Die Coefficientendeterminante der 2 ersten, welche

$$= (AC + Ah^2 + Cz^2) \sin \tau$$

ist, kann nur verschwinden für  $\sin \tau = 0$ , wo der Körper vertical auf seinem Scheitel steht. Von diesem Falle abgesehen, ergeben jene 2 Gleichungen:

$$v'' = 0; \quad \varphi'' = 0$$

Hiernach sind  $v'$  und  $\varphi'$  constant, und die dritte Gleichung setzt sie in Relation. Die lebendige Kraft ist willkürlich constant. Die dritte Gleichung lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned} [-C \sin \tau + h(z \cos \tau - h \sin \tau)](v' \cos \tau + \varphi')\varphi' & \\ + [A \cos^2 \tau + C \sin^2 \tau + (z \cos \tau - h \sin \tau)^2]\varphi'^2 \sin \tau & \\ = \gamma(z \sin \tau + h \cos \tau) \cos \tau & \end{aligned}$$

Bei einer Rollbewegung ohne Rotation um die Verticalen verschwindet der erste Term, und man hat:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \pm \sqrt{\gamma \cot \tau \frac{z \sin \tau + h \cos \tau}{A \cos^2 \tau + C \sin^2 \tau + (z \cos \tau - h \sin \tau)^2}} \\ v' &= - \frac{\varphi'}{\cos \tau} \end{aligned} \quad (31)$$

Zur Bestimmung der Rollbahn auf der Grundebene erhält man aus den Gl. (4) nach Einführung der Werte (26) (25):

$$\partial x_4 = h \partial v \sin \varphi; \quad \partial y_4 = h \partial v \cos \varphi$$

das ist im Falle der Nichtrotation:

$$\partial x_4 = - \frac{h \partial \varphi \sin \varphi}{\cos \tau}; \quad \partial y_4 = - \frac{h \partial \varphi \cos \varphi}{\cos \tau}$$

woraus:

$$x_4 = \text{const} + \frac{h \cos \varphi}{\cos \tau}; \quad y_4 = \text{const} - \frac{h \sin \varphi}{\sin \tau}$$









Die Coordinaten von  $P$  seien:

$$p_a, p_b, p_c$$

Die Gleichung des Kegelschnittes  $k$  laute:

$$\Sigma g_{aa}x_a^2 + 2\Sigma g_{bc}x_bx_c = 0$$

Die Gleichungen der Strahlen  $PB$ ,  $PC$  sind:

$$-p_cx_a + p_ax_c = 0, \quad p_bx_a - p_ax_b = 0$$

Die Gleichung des Strahlenbüschels von dem Mittelpunkte  $P$  ist also:

$$-p_cx_a + p_ax_c + \lambda(p_bx_a - p_ax_b) = 0$$

Der Strahl  $\lambda$  ist somit die Gerade:

$$-p_c + \lambda p_b \quad -\lambda p_a \quad + p_a$$

Der Strahl  $\lambda$  trifft  $\mathfrak{G}$  in

$$\mathfrak{P}_\lambda \equiv -b_1p_a - \lambda c_1p_a \quad a_1p_a + c_1p_c - \lambda c_1p_b \quad -b_1p_c + \lambda a_1p_a + \lambda b_1p_b$$

Die Polare von  $\mathfrak{P}_\lambda$  in Bezug auf den Kegelschnitt  $k$  trifft den Strahl  $\lambda$  in einem zu  $\mathfrak{P}_\lambda$  conjugirten Punkte  $P_\lambda$ . Die Gleichung der Polare von  $\mathfrak{P}_\lambda$  ist nach I.:

$$\begin{aligned} & [-b_1(p_ag_{aa} + p_cg_{ac}) + (a_1p_a + c_1p_c)g_{ab}]x_a \\ & + [-b_1(p_ag_{ba} + p_cg_{bc}) + (a_1p_a + c_1p_c)g_{bb}]x_b \\ & + [-b_1(p_ag_{ca} + p_cg_{cc}) + (a_1p_a + c_1p_c)g_{cb}]x_c \\ & + \lambda \left\{ \begin{aligned} & [-c_1(p_ag_{aa} + p_bg_{ab}) + (a_1p_a + b_1p_b)g_{ac}]x_a \\ & + [-c_1(p_ag_{ba} + p_bg_{bb}) + (a_1p_a + b_1p_b)g_{bc}]x_b \\ & + [-c_1(p_ag_{ca} + p_bg_{cb}) + (a_1p_a + b_1p_b)g_{cc}]x_c \end{aligned} \right\} \\ & = 0 \end{aligned}$$

Die Polaren der  $\mathfrak{P}_\lambda$  bilden ein Strahlenbüschel

$$U + \lambda V = 0$$

Die Gleichung des Strahles  $P\mathfrak{P}_\lambda$  hat die Form:

$$U' + \lambda V' = 0$$

Für den Schnittpunkt  $P_\lambda$  des Strahles  $P\mathfrak{P}_\lambda$  mit der Polare von  $\mathfrak{P}_\lambda$  gilt also die Beziehung:

$$UV' - U'V = 0$$

Die Rechnung gibt:

$$\Sigma g_{aa'}x_a^2 + 2\Sigma g_{bc'}x_bx_c = 0$$

$$g_{aa'} = (b_1 p_b + c_1 p_c) g_{aa} - a_1 (p_b g_{ab} + p_c g_{ac})$$

$$2g_{bc'} = g_{bc}(2a_1 p_a + b_1 p_b + c_1 p_c) - p_a(b_1 g_{ca} + c_1 g_{ab}) - (b_1 p_c g_{cc} + c_1 p_b g_{bb})$$

Wir bezeichnen diesen Kegelschnitt mit  $\mathfrak{R}$ . Die Coefficienten  $g_{aa'}$ ,  $g_{bc'}$  sind in Bezug auf  $p_a$ ,  $a_1$  und  $g_{aa}$ ,  $g_{bc}$  linear. Die Kegelschnitte  $\mathfrak{R}$  bilden also ein Büschel, sowol wenn die Kegelschnitte  $k$  ein solches bilden, als auch wenn  $P$  auf einer Geraden sich bewegt, oder  $\mathfrak{U}$  durch einen festen Punkt geht. Ist  $\mathfrak{U}$  die unendlich ferne Gerade, also  $a_1 = a$ , so wird  $\mathfrak{R}$  der Ort der Mittelpunkte aller Sehnen des Kegelschnittes  $k$ , welche durch einen Punkt  $P$  gehen.

Wien, Juli 1880.

## XIX.

## Ueber das Transversalensystem zweier Punkte.

Von

Emil Hain.

I.  $P, Q$  seien zwei Punkte in der Ebene des Dreiecks  $ABC$ .  $AP$  treffe  $BC$  in  $P_a$ .  $\Pi_a$  liege zu  $P_a$  bezüglich  $BC$  harmonisch.  $\Pi_a, \Pi_b, \Pi_c$  liegen in einer Geraden, der Harmonikale von  $P$ . Diese treffe  $AQ$  in  $\mathfrak{P}_a$ . Dann schneiden sich die  $P_a\mathfrak{P}_a$  in einem Punkte.

Die Seiten des Dreiecks  $ABC$  ( $BC = a$ ) seien die Axen für die trimetrischen Coordinaten  $p_a, p_b, p_c$  des Punktes  $P$ , so dass

$$\begin{aligned} P &\equiv p_a & p_b & p_c \\ P_a &\equiv 0 & p_b & p_c \\ \Pi_a &\equiv 0 & p_b & -p_c \\ Q_a &\equiv 0 & q_b & q_c \end{aligned}$$

Die  $\Pi_a$  liegen in der Geraden

$$p_b p_c \quad p_c p_a \quad p_a p_b$$

Diese trifft die

$$AQ_a \equiv 0 \quad q_c \quad -q_b$$

in

$$\mathfrak{P}_a \equiv p_a(p_b q_c + p_c q_b) \quad -p_b p_c q_b \quad -p_b p_c q_c$$

Wir finden nun:

$$P_a \mathfrak{P}_a \equiv p_b p_c (p_b q_c - p_c q_b) \quad -p_c p_a (p_b q_c + p_c q_b) \quad p_a p_b (p_b q_c + p_c q_b)$$

Die  $P_a \mathfrak{P}_a$  treffen sich in

$$0 \equiv p_a^2 (p_b q_c + p_c q_b)$$

$0$  liegt in der Geraden  $p_b q_c - p_c q_b$ , der Verbindungsgeraden der Punkte  $P, Q$ . Für  $P \equiv J$ , dem Inkreiscentrum des Axendreiecks, wird  $p_a = 1$ ,  $0 \equiv q_b + q_c$ . Wir haben also folgendes Resultat:



$$O_2 \equiv bc \left[ \begin{array}{l} 2a.bc(2ap_a + bp_b + cp_c) \\ + b.ca(ap_a + 2bp_b + cp_c) \\ + c.ab(ap_a + bp_b + 2cp_c) \end{array} \right] \\ \equiv bc(6ap_a + 5bp_b + 5cp_c)$$

Denselben Punkt erhält man aber auch, wenn man

$$-\alpha = \frac{2}{3}, \quad a_1 = 6a_p$$

setzt.

Verlängern wir  $AP_a$  über  $A$  hinaus um sich selbst, so ist:

$$a_1 = -a_p, \quad \alpha = -\frac{1}{3} \\ O \equiv bc(ap_a + 2bp_b + 2cp_c)$$

Für  $\alpha = 1$  erhalten wir folgendes Resultat:

Trifft  $AP$  ( $P \equiv p_a$ ) die  $BC$  in  $P_a$ , ist  $A_1$  die Mitte von  $AP_a$ , schneiden die  $B_1C_1$  die  $BC$  in  $A_2$ , und liegt  $A_3$  harmonisch zu  $A_2$  bezüglich  $BC$ , so begegnen sich die  $AA_3$  im Punkte

$$O \equiv bc(bp_b + cp_c - ap_a)$$

Für  $\alpha = \beta = \gamma = \varepsilon$  wird

$$\frac{a_1}{a_p} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} = \frac{AA_1}{AP}$$

$$O \equiv bc(bp_c + cp_c - \varepsilon ap_a)$$

Alle Punkte  $\varepsilon$  liegen auf der Geraden  $a(bp_b - cp_c)$ , welche durch  $P$  und den Schwerpunkt  $S$  des Axendreiecks geht. Die Punktpaare  $+\varepsilon, -\varepsilon$  bilden eine Involution, deren Doppelpunkte  $P$  und der Punkt

$$O_0 \equiv bc(bp_b + cp_c)$$

sind. Setzen wir  $AA_1 : AP = \varphi$ , so erhalten wir:

$$A_1(a) = \frac{2F}{a \Sigma ap_a} [(1 - \varphi)(bp_b + cp_c) + ap_a]$$

$$A_1(b) = \frac{2F\varphi p_b}{\Sigma ap_a}, \quad A_1(c) = \frac{2F\varphi p_c}{\Sigma ap_a}$$

Da, wie aus der Figur zu ersehen, die  $B_1C_1$  den  $BC$  parallel sind, so wird hier  $O$  immer mit  $S$  zusammenfallen. Als Schwerpunkt des Dreiecks  $A_1B_1C_1$  erhält man den Punkt:

$$bc \left[ bp_b + cp_c - \left( \frac{2\varphi + 1}{\varphi - 1} \right) ap_a \right]$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem früher gefundenen:

$$O \equiv bc(bp_b + cp_c - \varepsilon ap_a)$$

$$\varepsilon = \frac{a_1}{a_p - a_1}$$

so findet man:

$$a_1 = \frac{2\varphi + 1}{3\varphi} a_p$$

Zugleich ergibt sich der Satz:

Die Schwerpunkte aller Dreiecke, welche mit einem gegebenen Dreieck ähnlich liegen und einen gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt besitzen, liegen auf einer Geraden, welche durch den gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt und den Schwerpunkt des Urdreiecks geht.

Wien, November 1880.

---

XXI.

Ueber magische Quadrate und ähnliche Zahlenfiguren.

Von

Dr. Th. Harmuth.

I.

Magische Quadrate.

Man bezeichnet mit dem Ausdruck „magisches Quadrat“ bekanntlich eine Gruppe von  $m^2$  auf einander folgenden Zahlen, welche in  $m$  Reihen von je  $m$  Gliedern so geordnet sind, dass die Summe jeder beliebigen Horizontalreihe oder Verticalreihe gleich

$$\frac{1}{m} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m^2} \lambda = \frac{m^3 + m}{2} \text{ ist.}$$

Zuweilen wird ausserdem verlangt, dass jede der beiden Diagonalreihen diese Summe haben soll. Im Folgenden ist diese Forderung unberücksichtigt geblieben. Die Lösung gestaltet sich sehr verschieden, je nachdem  $m$  eine der drei Formen  $2n+1$ ,  $4n$ ,  $4n+2$  annimmt.

1)  $m$  ungerade, also  $= 2n+1$ .

§ 1. Für diesen Fall ist eine Herstellungsregel („welche übrigens auch die Diagonalreihen berücksichtigt“) bekannt. Sie lautet:

Man setzt unmittelbar unter das mittelste Feld die Zahl 1 und geht dann in der natürlichen Zahlenfolge rechts abwärts weiter. Wo























ungefähr dem § 3. entsprechen würde, lässt sich folgendermassen angeben.

Von der für  $k = 1$ , also  $n = 4$  gefundenen Grundform

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 10 & 13 & 4 & 7 \\ 15 & 12 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & 14 & 9 \end{vmatrix}$$

die einstweilen kurz mit  $(1, 16)$  bezeichnet werden möge, ausgehend bilde man die diesem entsprechenden allgemeineren Quadrate

$$(17, 32) \quad (33, 48) \quad (49, 64) \dots (16\lambda + 1, 16\lambda + 16)$$

worin  $\lambda = (2p - 1)^2 - 1$ ,  $p$  ganzzahlig anzunehmen ist.  $\lambda$  hat demnach successive die Werte

$$\lambda = 8, \quad 24, \quad 48, \quad 80, \quad 120, \quad 168, \quad 224 \dots (2p + 1)^2 - 1$$

Für diese Werte ordne man die einzelnen Gruppen entsprechend den Elementen eines Quadrates mit der Grundzahl

$$3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \quad 13, \quad 15 \dots 2p + 1$$

um geradstellige Quadrate mit den successiven Grundzahlen:

$$12, \quad 20, \quad 28, \quad 36, \quad 44, \quad 52, \quad 60 \dots 8p + 4$$

zu erhalten.

Um das Quadrat für die Grundzahl 8 zu erhalten, stelle man zusammen:

$$\begin{array}{ll} (1, 16) & (49, 64) \\ (17, 32) & (33, 48) \end{array}$$

und vertausche dann wieder in vier nach Massgabe des vorigen § zu bestimmenden Horizontalreihen diejenigen Glieder, welche gleichweit vom Ende stehen. Bei Benutzung der vier mittelsten Reihen erhält man dann:

$$\begin{array}{|cccccccc|} \hline 1 & 6 & 11 & 16 & 49 & 54 & 59 & 64 \\ 10 & 13 & 4 & 7 & 58 & 61 & 52 & 55 \\ 50 & 53 & 60 & 63 & 2 & 5 & 12 & 15 \\ 57 & 62 & 51 & 56 & 9 & 14 & 3 & 8 \\ 48 & 43 & 38 & 33 & 32 & 27 & 22 & 17 \\ 39 & 36 & 45 & 42 & 23 & 30 & 29 & 26 \\ 31 & 28 & 21 & 18 & 47 & 44 & 37 & 34 \\ 24 & 19 & 30 & 25 & 40 & 35 & 46 & 41 \\ \hline \end{array} = Q(8)$$



$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & & & & & & & \\
 & 64 & & & & & & & \\
 & 5 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 & 48 \\
 62 & 51 & 46 & 35 & 29 & 20 & 13 & 4 & \\
 5 & 12 & 21 & 28 & 38 & 43 & 54 & 59 & \\
 60 & 53 & 44 & 37 & 27 & 22 & 11 & 6 & \\
 7 & 10 & 23 & 26 & 40 & 41 & 56 & 57 & \\
 58 & 55 & 42 & 39 & 25 & 24 & 9 & 8 & 
 \end{array} = Q(8)$$

Der allgemeine Beweis für die Richtigkeit der Anordnung ist in folgender Weise zu führen:

a. Für die Verticalreihen.

In der ersten Verticalreihe stehen die Zahlen:

$$\begin{aligned}
 & [1+3+5+\dots+2n-1] + [4n^2 + (4n^2-2) + (4n^2-4) + \dots + (4n^2-2n+2)] \\
 = & n^2 + 4n^2 - (2+4+\dots+2n-2) \\
 = & n^2 + 4n^2 - n(n-1) = 4n^2 + n, \text{ oder weil } n = \frac{m}{2} \text{ ist} \\
 & = \frac{m^2 + m}{2}
 \end{aligned}$$

welches die verlangte Summe ist. In der letzten Verticalreihe dagegen stehen:

$$[2+4+6+\dots+2n] + [(4n^2-1) + (4n^2-3) + (4n^2-5) + \dots + (4n^2-2n+1)]$$

d. h. in der einen Hälfte ist jedes Glied um 1 grösser, in der andern um 1 kleiner als ein entsprechendes Glied der ersten Verticalreihe, die Gesamtsumme beider Reihen muss demnach dieselbe sein.

In der vorletzten Verticalreihe stehen:

$$\begin{aligned}
 & [(2n+1) + (2n+3) + \dots + (4n-1)] + [(4n^2-2n) + (4n^2-2n+2) + (4n^2-2n+4) \\
 & \quad + \dots + (4n^2-4n+2)]
 \end{aligned}$$

d. h.  $n$  Zahlen sind um je  $2n$  grösser und  $n$  Zahlen um je  $2n$  kleiner als die entsprechenden in der ersten Verticalreihe. Die zweite Verticalreihe mit der Summe:

$$\begin{aligned}
 & [(2n+2) + (2n+4) + \dots + (4n)] + [(4n^2-2n+1) + (4n^2-2n+3) \\
 & \quad + (4n^2-2n+5) + \dots + (4n^2-4n+1)]
 \end{aligned}$$

steht zur letzten in derselben Beziehung.



Stellt man das System vollständig auf, so findet man, dass der Beweis für die ungeradstelligen Horizontalreihen analog der ersten, für die geradstelligen analog der zweiten zu führen ist.

§ 7. Eine der vorigen ähnliche Lösung ist folgende:

Man ersetze die Zahlen

$$\begin{array}{cccccccc}
 1, & 3, & 5 & \dots 2n-1 & \text{d. Reihe nach durch} & 1, & 2, & 3, & \dots n \\
 2, & 4, & 6 & \dots 2n & \text{,, ,, ,, ,,} & n+1, & n+2, & n+3 & \dots 2n \\
 2n+1, & 2n+3, & 2n+5 & \dots 4n-1, & \text{,, ,, ,, ,,} & 2n+1, & 2n+2, & 2n+3 & \dots 3n \\
 2n+2, & 2n+4, & 2n+6 & \dots 4n & \text{,, ,, ,, ,,} & 3n+1, & 3n+2, & 3n+3 & \dots 4n
 \end{array}$$

u. s. w.

Für  $n = 4$  oder  $k = 2$  hat man dann das Beispiel:

1	16	17	32	37	44	53	60	= Q(8)
64	49	48	33	28	21	12	5	
2	15	18	31	38	43	54	59	
63	50	47	34	27	22	11	6	
3	14	19	30	39	42	55	58	
62	51	46	35	26	23	10	7	
4	13	20	29	40	41	56	57	
61	52	45	36	25	24	9	8	

Für die Verticalreihen ist der Beweis direct auf den vorigen Fall zurückzuführen, da hier wie dort je zwei auf einander folgende Glieder jeder Verticalreihe die Summe  $4n^2 + 1$  haben; da  $n$  solcher Paare vorhanden sind, ist die Gesamtsumme  $4n^3 + n$ . Dagegen stehen in den Horizontalreihen Paare, deren Summe abwechselnd

$$4n^2 - n + 1 \text{ und } 4n^2 + n + 1 \text{ ist.}$$

Die Gesamtsumme ist also :

$$\frac{n}{2}(8n^2 + 2) = 4n^3 + n.$$

§ 8. Eine andere ebenfalls für jede Grundzahl  $m = 4k$  anwendbare Auflösung findet in folgender Herstellungsregel Ausdruck:

Man schreibe in die ersten  $\frac{m}{4}$  Felder der ersten Verticalreihe die ersten  $\frac{m}{4}$  ungeraden Zahlen; in die direct darunter folgenden  $\frac{m}{2}$  Felder der letzten Verticalreihe die folgenden  $\frac{m}{2}$  ungeraden Zah-































Wenden wir nun dieses Verfahren auf  $\Delta_2'$  an, indem wir die dritte Horizontalzeile zerlegen, und fahren wir so fort bis die vorletzte Zeile zerlegt ist, so erhalten wir:

$$(3) \quad \Delta' = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \alpha_1 C_1'' & \alpha_2 C_2' & \dots & \alpha_{n-1} C_{n-1}' & \alpha_n C_n' \\ \alpha_1 C_1'' & \alpha_2 C_2'' & \dots & \alpha_{n-1} C_{n-1}'' & \alpha_n C_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{b_0}{\alpha_1} & \frac{b_0}{\alpha_2} & \dots & \frac{b_0}{\alpha_{n-1}} & \frac{b_0}{\alpha_n} \end{vmatrix}$$

Führen wir hier in der dritten Horizontalzeile für die verschiedenen  $C'$  ihre Werte wieder ein, so ergibt sich:

$$(4) \quad \Delta' = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1(a_{n-1} + \alpha_1) & \alpha_2(b_{n-1} + \alpha_2) & \dots & \alpha_n(b_{n-1} + \alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \\ = \Delta_3' + \Delta_4',$$

wo (nach Zerlegung der dritten Horizontalreihe)

$$(5) \quad \Delta_3' = - b_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{wie oben} \end{vmatrix} = 0$$

und

$$(6) \quad \Delta_4' = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{wie oben} \end{vmatrix} \text{ sind.}$$

Verfahren wir nun ebenso mit der vierten, fünften u. s. f. endlich mit der vorletzten Horizontalzeile, so erhalten wir, wenn wir überdies aus der letzten Zeile  $b_0$  herausheben:



Die Determinanten  $A_1, A_2$  der Determinanten statt der 1, 2  $a_{n-1}, a_{n-2} \dots$  sich im Allgemeinen in Untersuchung der Anzahl von Determinanten gegen sich.

---

Anm. d. Red. Vergleicht man das Resultat, das auf diesem Wege gewonnen wird, mit dem bekannten Ausdruck des Partialbruches, so ist sich die vorstehende Rechnung als Beweis eines gleichfalls bekannten Determinanten dar.

---

### XXIII.

## Miscellen.

#### 1.

#### Eine Tangentenconstruction zur Astroide.

Es sei gegeben eine gerade Kante  $\bar{P}$ , in dieser die Punkte  $m s n$ , deren gegenseitige Entfernung  $\delta(m \text{ --- } s) = \delta(s \text{ --- } n) = a$  beträgt.

Die Punkte  $m$  und  $s$  bewegen sich längs der sich normal durchschneidenden Geraden  $\bar{X} \bar{Z}$ .

Dann beschreibt bekanntlich der Punkt  $n$  eine Ellipse  $\bar{E}$  von den Axenlängen  $a, 2a$ , die aufeinander folgenden Lagen  ${}^a\bar{P}, {}^1\bar{P}, {}^2\bar{P} \dots$  der Kante umhüllen eine Astroide. (In Fig. 1. wurde die Oberfläche als die Ebene der Geraden  $\bar{X} \bar{Z}$  aufgefasst, und die einzelnen Lagen der Kante, als auch die dieselben umhüllende Astroide gebildet).

Die so erhaltene Figur (Fig. 1.) wollen wir nun räumlich wie folgt interpretiren:

Die Axen  $\bar{X} \bar{Z}$  der Ellipse  $\bar{E}$  betrachten wir als die  $X$ - und  $Z$ -Achse des orthogonalen Coordinaten-Systems; die Linien  $\bar{E}_2, X_2, Z_2$  dann die Aufrisse der in der Verticalprojectionsebene enthaltenen Ellipse  $\bar{E}$  und der Coordinatenachsen  $\bar{X}, \bar{Z}$ ;  $\alpha_{1,2}$  der Grund- und Auf-  
riss der Coordinatenanfangs.

Jede zwei parallele Bildgerade z. B.  ${}^\mu\bar{P}_1$  und  ${}^\mu\bar{P}_2$  können als Grund- und Aufriss einer Geraden  ${}^\mu\bar{P}$  betrachtet werden, welche die

Ellipse  $\tilde{E}$  in dem Punkte  $\mu_n$ , eine Gerade  $A$ , die in der Halbirungsebene  $H\bar{x}$  \*) liegt, im Punkte  $\mu_s$  trifft.

Aus der Parallelität der Bildgeraden  $\mu\bar{P}_1$ ,  $\mu\bar{P}_2$  geht ausserdem hervor, dass die sämtlichen Geraden  $\mu P$  zur Halbirungsebene  $H\bar{x}$  parallel sind, folglich einem geraden Konoide angehören.

Die Grund- und Aufrisscontour dieser Fläche sind congruente Astroiden, die mit der schon erwähnten zusammenfallen.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, aus dem Bildpunkte  $\alpha_1$  zu dieser Astroide die Tangenten zu construiren.

Da diese Astroide von den Grundrissen aller Geraden unseres Konoids tangirt wird, können umgekehrt alle geradlinigen Tangenten, folglich auch die von uns gesuchten als Grundrisse von Mantellinien des Konoids aufgefasst werden.

Diese Mantellinien müssen, da die Grundrisse den Bildpunkt  $\alpha_1$  enthalten sollen, die horizontalprojicirende Gerade  $\bar{Z}_a$ , deren Grundriss mit  $\alpha_1$  zusammenfällt, treffen.

Es ist folglich zur Lösung unserer Aufgabe notwendig diejenigen Mantellinien des Konoides zu ermitteln, welche die Gerade  $Z_a$  durchschneiden.

Alle Geraden, welche  $Z_a$  und  $A$  schneiden und zur Halbirungsebene  $H\bar{x}$  parallel sind bilden ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid. Die gesuchten Geraden liefert der Schnitt desselben mit dem Konoide.

Um diesen Schnitt zu erhalten, bedienen wir uns der Verticalprojectionsebene.

Diese schneidet das Konoid in der Ellipse  $\tilde{E}$ , das Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel  $\tilde{H}$ , die durch den Punkt  $o$  hindurchgeht, und deren Asymptoten wir leicht ermitteln können.

Die zur Verticalprojectionsebene parallelen Geraden des Paraboloids sind die  $Z_a$  und dann die Gerade  $U$ , welche, da sie in der Halbirungsebene  $H\bar{x}$  enthalten ist und  $Z_a$  schneidet, leicht aufzufinden ist. (Ihr Horizontalabstand gleicht dem Verticalabstande der Geraden  $Z_a$ ).

Die Verticaltrace der durch  $Z_a$  bestimmten Verticalprojections-

\*) Vergl. Fiedler. Darst. Geometrie.









Peripheriewinkel  $c, d, \dots$  der Kreislinie  $K$  einander gleich sind, so müssen auch die Winkel  $bc_2c_3, bd_2d_3, \dots$  einander gleich sein. Die Scheitel  $c_2, d_2, \dots$  der zuletzt genannten Winkel befinden sich aber auf der Kreislinie  $K_2$ , und ihre Schenkel  $\overline{bc_2}, \overline{bd_2}, \dots$  schneiden sich im Punkte  $b$  derselben Kreislinie, folglich müssen auch die übrigen Schenkel  $c_2c_3, d_2d_3, \dots$  im Punkte  $f$  der Kreislinie  $K_2$  sich schneiden. Endlich sind die Winkel  $ae_3f, af_3f, \dots$  auch einander gleich, denn sie sind gleich den Winkeln  $bc_2c_3, bd_2d_3, \dots$ , und weil ihre Schenkel in zwei festen Punkten  $a$  und  $f$  sich treffen, so müssen ihre Scheitel  $c_3, d_3, \dots$  auf einer Kreislinie  $K_3$  sich befinden.

Was die Bestimmung des Mittelpunktes  $s_3$  des Kreises  $K_3$  betrifft, hat man zu berücksichtigen, dass die Tangente  $ae_1$  des Kreises  $K$  im Punkte  $a$ , da sie mit dem Kreise zwei zusammenfallende Punkte  $a$  und  $e$  gemein hat, auf den Kreisen  $K_1$  und  $K_3$  auch zwei zusammenfallende Punkte  $e_1$  und  $e_3$  bestimmt, und dass sie also als eine gemeinschaftliche Secante der Kreise  $K_1$  und  $K_3$  erscheint. Nun erkennt man, dass der Radius  $sa$  und die Verbindungslinie  $s_1s_3$  der Kreismittelpunkte  $s_1, s_3$  auf der gemeinschaftlichen Secante  $ae_1$  senkrecht stehen, und dass daher  $as$  parallel zu  $s_1s_3$  ist. Wird aus den congruenten Dreiecken  $ams, s_1ms_3$  auch Gleichheit der Strecken  $s_1s_3, as$  erwiesen, so kann der Mittelpunkt  $s_3$  entweder durch den Schnitt der Geraden  $bs_3$  (parallel  $ss_1$ ),  $s_1s_3$  (parallel  $as$ ), oder durch  $s_1s_3$  gleich und parallel  $as$  bestimmt werden. In ähnlicher Weise könnte man beweisen, dass die gemeinschaftliche Secante  $ag$  der Kreise  $K$  und  $K_3$  den Kreis  $K_1$  im Punkte  $a$  berührt, und dass  $ss_3$  gleich und parallel  $as_1$  ist.

Ebenso wird der Beweis geliefert, dass die Punkte  $c_4d_4, \dots$  auf einem Kreise  $K_4$  liegen, welcher durch die Punkte  $a$  und  $e_1$  geht, und dessen Mittelpunkt  $s_4$  so erhalten wird, dass  $s_1s_4$  gleich und parallel  $as$  gemacht wird.

Aus dem Vorigen erhält man auch folgende Sätze, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann.

2. Ist ein Dreieck  $ae_1g$  gegeben, und werden drei Kreise  $K, K_1, K_3$  so construirt, dass  $K$  durch  $g$  geht und die Seite  $ae_1$  in  $a$  berührt,  $K_1$  durch  $e_1$  geht und die Seite  $ag$  in  $a$  tangirt, und dass  $K_3$  dem Dreiecke  $ae_1g$  umschrieben wird, so hat man für eine beliebige durch  $a$  gelegte Gerade, welche die Kreise  $K, K_1, K_3$  in den Punkten  $c, c_1, c_3$  schneidet,  $ac = c_1c_2$ . Im Falle, dass das Dreieck  $ae_1g$



$$g^{2\lambda + \frac{p-1}{2}} \equiv -4 \pmod{p}$$

oder

$$g^{2\lambda + \frac{p-1}{2}} + 2^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

Da  $\frac{p-1}{2}$  eine gerade Zahl und jede ungerade Zahl relativ prim zu 2 ist, folgt der Satz, dass jede Primzahl  $p = 4n + 1$  Summe zweier Quadrate ist, direct aus dem oben angeführten.

Sind ferner  $g$  und  $\gamma$  zwei primitive Wurzeln von  $p$ , welche relativ prim zu einander sind, so ist

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad \text{und} \quad \gamma^{p-1} \equiv +1 \pmod{p}$$

also

$$g^{\frac{p-1}{2}} + \gamma^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

Ebenso ist

$$g^{p-1} \equiv +1 \quad \text{und} \quad \gamma^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$$

also

$$g^{p-1} + \gamma^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p}$$

wodurch der Satz ebenfalls auf den a. a. O. bewiesenen zurückgeführt ist.

Th. Harmuth.

## 4.

## Ueber die Ausdehnung der Kepler'schen Gesetze.

Fortsetzung zu S. 112.

Bezeichnet  $T$  die Umlaufszeit, entsprechend einem Intervall der  $\mu$  von 4 Rechten, so hat man:

$$\gamma T = 2Rab$$

Nach dem 4. Gesetze muss sein:

$$cT = 2Ra^{\frac{3}{2}}$$

wo  $c$  für alle Planeten denselben Wert hat. Folglich ist notwendige Bedingung der Gültigkeit:

$$\gamma^2 = c \frac{b^2}{a}$$

woraus:

$$v = \frac{2cb^2}{a} \frac{a^2 - e^2 \cos^2 \mu}{(ab + b\alpha \cos \mu + a\beta \sin \mu)^2} \quad (13)$$













$x$	$\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$	$\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$
$+\infty$	$e$	$e$
$\vdots$		
$3$	$\frac{64}{27}$	$\frac{512}{27}$
$\vdots$		
$2$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$
$\vdots$		
$1$	$2$	$4$
$\vdots$		
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{27}$
$\vdots$		
$\frac{1}{3}$	$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{256}$
$\vdots$		
$\pm 0$	$1$	$\infty$
$\vdots$	imaginäre Werte	
$-1$	$0$	$0$
$\vdots$		
$-\frac{3}{2}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{3}$
$\vdots$		
$-2$	$4$	$2$
$\vdots$		
$-\infty$	$e$	$e$

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass sich zu jedem Werte  $a$  sofern derselbe positiv und grösser als  $+1$  ist, eine Zahl  $b$  lässt, welche so beschaffen ist, dass  $a^b = b^a$ . Gleichzeitig sieht man, dass nur ein Wert von  $b$  möglich ist. Denn ist z. B.  $a = \sqrt{3}$ , so findet sich diese Zahl zwar in beiden Reihen, die zugehörige  $b$  lautet aber beidemal  $\sqrt{27}$ . Für echte Brüche ist jedoch ebenfalls die Zahl  $b$  imaginär oder die Potenz  $a^b$ .

Das erhaltene Resultat ist also: Zu jeder positiven Zahl  $a$ , grösser als  $+1$  ist (mit Ausnahme von  $e$ ), existirt eine von ihr verschiedene zugehörige Zahl  $b$ , die so beschaffen ist, dass  $a^b = b^a$ .

Breslau, den 16. Dec. 1880.

M. Luxenberg, stud. math.

8.

Ueber die Tangenten der hyperbolischen Spirale.

Wenn der Punkt  $P$  einer hyperbolischen Spirale und der Punkt  $P'$  der Kreisevolvente, welche von einem beliebigen Punkt

**Polarachse** beschrieben wird, demselben Polarwinkel, beziehungsweise **Wälzungswinkel** entsprechen: dann ist die Tangente von  $P$  mit dem **Radiusvector** von  $P'$  parallel.

Ist  $t$  der Winkel, welchen die Tangente mit der Polarachse  $OX$  bildet, so ist bekanntlich

$$\operatorname{tang} t = \frac{\frac{dr}{du} \sin u + r \cos u}{\frac{dr}{du} \cos u - r \sin u}$$

Für die hyperbolische Spirale hat man:

$$r = \frac{a}{u}, \quad \frac{dr}{du} = -\frac{a}{u^2}$$

also ist

$$\operatorname{tang} t = \frac{-\frac{a}{u^2} \sin u + \frac{a}{u} \cos u}{-\frac{a}{u^2} \cos u - \frac{a}{u} \sin u}$$

oder

$$\operatorname{tang} t = \frac{\operatorname{tang} u - u}{1 + u \operatorname{tang} u}$$

Nehmen wir nun einen Kreis mit dem Mittelpunkte  $O$  (Pol) und dem beliebigen Halbmesser  $b$  an, so beschreibt der in  $OX$  gelegene Kreispunkt  $A$  eine Kreisevolvente, deren Gleichungen

$$x = b(\cos u + u \sin u), \quad y = b(\sin u - u \cos u)$$

sind, wenn der Wälzungswinkel  $A'OA \dots u$  genannt wird. Der Polarwinkel  $\Theta$  der Kreisevolvente ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \Theta = \frac{y}{x}$$

d. i. hier gleich  $\frac{\sin u - u \cos u}{\cos u + u \sin u}$ . Es ist also

$$\operatorname{tang} \Theta = \frac{\operatorname{tang} u - u}{1 + u \operatorname{tang} u} = \operatorname{tang} t$$

oder Wkl.  $\Theta =$  Wkl.  $t$ , womit der obige Satz bewiesen ist.

Da die Subtangente  $OQ$  der hyperbolischen Spirale den constanten Wert  $-a$  hat, so lässt sich, auf obigen Satz gestützt, die hyperbolische Spirale mit ihren Tangenten leicht construiren. Auch lassen sich nun einige andere Aufgaben einfach lösen, z. B. die Tan-

genten einer hyperbolischen Spirale zu ermitteln, welche einer gegebenen Geraden parallel sind, oder den Wert  $a$  zu bestimmen, wenn ein Punkt  $P$ , der Pol und die Polarachse gegeben sind, etc.

Eisenstadt, im Jänner 1881.

Fr. Schiffner.





$$S = \frac{\pi}{8} (c^2 - p^2 - q^2),$$

oder

$$S = \frac{\pi}{8} \cdot [(p+q)^2 - (p^2 + q^2)]$$

$$S = \frac{\pi}{4} \cdot pq$$

oder, da

$$pq = h^2,$$

(1)

$$S = h^2 \frac{\pi}{4};$$

womit der Satz des Archimedes erwiesen.

2. Wenn man den Halbkreis über der Hypotennuse, sowie die Halbkreise über  $BD$  und  $AD$  zu Kreisen vervollständigt und noch um jede der Katheten  $AC$  und  $BC$  Kreise beschreibt, welche die um  $BD$  und  $AD$  als Durchmesser beschriebenen Kreise in den Punkten  $E$  und  $H$  schneiden mögen, so entstehen die krummlinigen Dreiecke  $BEDKAWB$  und  $AHDLBWA$ , welche von denselben Kreislinien begrenzt werden wie die Sichel  $ACDBA$  und an Inhalt bezüglich den Flächen der Kreise um  $BC$  und  $AC$  gleich sind.

Es ist nämlich, wenn wir die Fläche des ersteren dieser Dreiecke mit  $S_1$  und die des zweiten mit  $S_2$  bezeichnen,

$$S_1 = \frac{p^2}{8} \pi + \frac{(p+q)^2}{8} \pi - \frac{q^2}{8} \pi$$

oder

$$S_1 = \frac{p^2}{8} \pi + \frac{p^2 + q^2 + 2pq}{8} \pi - \frac{q^2}{8} \pi$$

$$S_1 = \frac{\pi}{4} (p^2 + pq)$$

$$S_1 = \frac{\pi}{4} p c$$

oder, da

$$pc = a^2,$$

(2)

$$S_1 = \frac{\pi}{4} a^2;$$

d. h. das krummlinige Dreieck  $BEDKAWB$  ist an Inhalt gleich der Fläche des Kreises um  $BC$ .

Ebenso findet sich

(3)

$$S_2 = \frac{\pi}{4} b^2;$$

d. h. das krummlinige Dreieck  $AHDLBWA$  ist an Inhalt gleich der Fläche des Kreises um  $AC$ .





$$\Delta_0 - l - l' = S - m - m'$$

oder

$$(7) \quad S + l + l' = \Delta_0 + m + m';$$

d. h. die Summe der Flächen der Sichel des Archimedes und der Mündchen des Hippokrates ist gleich dem sichelförmigen Dreiecke  $APDJBWA$ , vermehrt um die das biconvexe Segment begrenzenden mondformigen Segmente; oder das krummlinige Viereck  $AFCGBEDHA$  ist gleich dem sichelförmigen Dreiecke  $APDJBWA$ , vermehrt um die genannten mondformigen Segmente.

5. Um zunächst den Abstand des Schwerpunktes der Sichel  $ACBDA$  von der Hypotenuse  $AB$  zu bestimmen, sei  $\alpha$  der Abstand des Schwerpunktes des Halbkreises über  $BD$  von der Hypotenuse  $AB$ ,  $\beta$  der des Schwerpunktes des Halbkreises über  $BD$   $\gamma$  der des Schwerpunktes des Halbkreises über  $AB$  und  $y$  der Abstand des Schwerpunktes der Sichel  $ACBDA$  von  $AB$ . Der Inhalt der Sichel ist nun gleich dem Inhalte des Halbkreises über  $AB$ , vermindert um die Summe der Inhalte der Halbkreise über  $AD$  und  $BD$ , und man hat, wenn man die Momente dieser Flächen in Bezug auf  $AB$  als Axe nimmt, mit Beachtung, dass der Inhalt der Sichel gleich dem Inhalte des Kreises um  $CD$  ist, die Gleichung

$$\alpha \cdot \frac{p^2}{8} \pi + \beta \cdot \frac{q^2}{8} \pi + y \cdot \frac{h^2}{4} \pi = \gamma \cdot \frac{(p+q)^2}{8} \pi,$$

oder, da

$$\alpha = \frac{2p}{3\pi}, \quad \beta = \frac{2q}{3\pi}, \quad \gamma = \frac{2(p+q)}{3\pi},$$

indem man zugleich reducirt,

$$p^3 + q^3 + 3yh^2\pi = (p+q)^3$$

oder

$$3yh^2\pi = 3p^2q + 3pq^2$$

oder, da

$$h^2 = pq,$$

$$y \cdot pq \cdot \pi = pq(p+q),$$

woher

$$y = \frac{p+q}{\pi}$$

(8)

$$y = \frac{1}{\pi} \cdot c.$$

Der Abstand des Schwerpunktes der Sichel von der Hypotenuse ist also nur von der Grösse der Hypotenuse abhängig und unabhängig von der Grösse der Katheten.

Für den Halbkreis über der Hypotenuse ist



$$V = \frac{p^2q + pq^2}{2}$$

$$V = \frac{pq(p+q)}{2} \pi = \frac{pqc}{2} \pi.$$

7. Um den Abstand des Schwerpunktes der Sichel *ACBDA* von der im Punkte *A* auf *AB* errichteten Senkrechten zu bestimmen, seien  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  die Abstände der Schwerpunkte der Halbkreise über *BD*, *AD*, *AB* und  $x$  der Abstand des Schwerpunktes der Sichel von der Senkrechten auf *AB* im Punkte *A*. Man hat alsdann, wenn man die Momente dieser Flächen in Bezug auf die Senkrechte nimmt, die Gleichung

$$\alpha' \cdot \frac{p^2}{8} \pi + \beta' \cdot \frac{q^2}{8} \pi + x \frac{h^2}{4} \pi = \gamma' \cdot \frac{c^2}{8} \pi$$

oder, da

$$\alpha' = q + \frac{p}{2}, \quad \beta' = \frac{q}{2}, \quad \gamma' = \frac{c}{2}$$

ist, wenn man einsetzt und reducirt

$$(2q+p)p^2 + q^3 + 4xh^2 = c^3$$

oder, da

$$h^2 = pq$$

und

$$c^3 = (p+q)^3,$$

$$2p^2q + p^3 + q^3 + 4xpq = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3,$$

woher

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{p+3q}{4} \\ \text{oder, durch die Functionen der Winkel ausgedrückt,} \\ x = \frac{1}{4}(a \cdot \sin A + 3b \sin B). \end{array} \right.$$

Will man den Wert von  $x$  durch die Seiten ausdrücken, so wird, da

$$q = \frac{b^2}{c} \quad \text{und} \quad p = \frac{a^2}{c} \quad \text{ist,}$$

$$x = \frac{a^2 + 3b^2}{4c} = \frac{c^2 + 2b^2}{4c}.$$

Für den besonderen Fall, dass das rechtwinkelige Dreieck *ABC* gleichschenkelig ist, wird

$$x = \frac{a^2}{c} = \frac{c}{2}.$$



$$V' = \frac{c^3}{8} \pi^2 - \frac{2p^2\pi^2}{8} \left( q + \frac{p}{2} \right) - \frac{q^3}{8} \pi^2$$

oder

$$V' = \frac{\pi^2}{8} (p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 - 2p^2q - p^3 - q^3)$$

oder nach Reduction

$$V' = \frac{\pi^2}{8} \cdot pq(p + 3q).$$

9. Gehen wir weiter zur Bestimmung des Schwerpunktes des krummlinigen Dreiecks *BEDKAWB*, so ist der Inhalt dieser Fläche gleich der Fläche des Halbkreises über *BD*, vermehrt um die des Halbkreises über *AB* und vermindert um die des Halbkreises über *AD*; oder in Zeichen ausgedrückt:

$$S_1 = \frac{p^2}{8} \pi + \frac{c^2}{8} \pi - \frac{q^2}{8} \pi,$$

oder, weil nach Gl. (2)

$$S_1 = \frac{\pi}{4} a^2,$$

$$\frac{\pi}{4} a^2 = \frac{p^2}{8} \pi + \frac{c^2}{8} \pi - \frac{q^2}{8} \pi.$$

Nimmt man die Momente dieser Flächen in Bezug auf die Hypotenuse *AB* und benennt die Abstände der Schwerpunkte der Halbkreisflächen von derselben wie vorhin bezüglich mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , und den Abstand des Schwerpunktes der Fläche *S*<sub>1</sub> mit  $y_1$ , so sind die Grössen  $\alpha$  und  $\beta$ , da die Schwerpunkte der Halbkreisflächen über *AB* und *AD* unterhalb *AB* liegen, mit negativem Vorzeichen einzuführen, und man erhält die Gleichung

$$y_1 \cdot \frac{\pi}{4} a^2 = \alpha \cdot \frac{p^2}{8} \pi - \gamma \cdot \frac{c^2}{8} \pi + \beta \cdot \frac{q^2}{8} \pi.$$

Da nun

$$\alpha = \frac{2p}{3\pi}, \quad \gamma = \frac{2c}{3\pi}, \quad \beta = \frac{2q}{3\pi}$$

ist, so wird

$$y_1 \cdot \frac{\pi}{4} a^2 = \frac{2p}{3\pi} \cdot \frac{p^2}{8} \pi - \frac{2c}{3\pi} \cdot \frac{c^2}{8} \pi + \frac{2q}{3\pi} \cdot \frac{q^2}{8} \pi$$

oder, wenn man reducirt

$$y_1 \pi a^2 = \frac{1}{3} (p^3 - c^3 + q^3),$$

oder

$$y_1 \pi a^2 = \frac{1}{3} (p^3 - p^3 - 3p^2q - 3pq^2 - q^3 + q^3),$$

folglich

$$y_1 = - \frac{pq(p + q)}{\pi a^2}.$$

Da













$$h^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2},$$

$$y' = \frac{abc^3\pi + 4a^2b^2c}{4\pi a^2b^2 + 8abc^2}$$

oder

$$y' = \frac{c^3\pi + 4abc}{4ab\pi + 8c^2}$$

(18)

$$\begin{cases} y' = \frac{c}{4} \frac{c^2\pi + 4ab}{ab\pi + 2c^2}, \\ y' = \frac{c}{4} \frac{c\pi + 4h}{h\pi + 2c}. \end{cases}$$

Aus der zuletzt erhaltenen Gleichung ergibt sich

$$\frac{4y'}{c} = \frac{c\pi + 4h}{h\pi + 2c}$$

oder

$$\frac{y'}{c} = \frac{\frac{c}{4}\pi + h}{h\pi + 2c}$$

oder

$$y':c = \left(\frac{c}{4} + \frac{h}{\pi}\right) : \left(h + \frac{2c}{\pi}\right)$$

oder

$$y':\frac{c}{2} = \left(\frac{c}{4} + \frac{h}{\pi}\right) : \left(\frac{h}{2} + \frac{c}{\pi}\right),$$

d. h. der Abstand des Schwerpunktes der Fläche  $\Sigma$  von der Hypotenuse verhält sich zur halben Hypotenuse, wie sich verhält der vierte Teil der letzteren vermehrt um den Abstand des Schwerpunktes der Halbkreislinie über der Höhe von dieser zur Summe der halben Höhe und des Abstandes des Schwerpunktes der Halbkreislinie über der Hypotenuse von dieser.

Der Abstand des Schwerpunktes der sichelförmigen Fläche  $\Sigma$  von der Hypotenuse ist also nicht, wie dieses bei den Flächen  $S$ ,  $S_1$  und  $S_2$  der Fall war, abhängig von einer Grösse, sondern von zweien, von der Hypotenuse und der Höhe des rechtwinkligen Dreiecks.

14. Bestimmung des Volumens des Rotationskörpers, welcher durch Umdrehung der Fläche  $\Sigma$  um die Hypotenuse entsteht. Bezeichnet man das Volumen dieses Rotationskörpers mit  $V_6$ , so ist nach den Gl. (16) und (18)



weiter

wodurch  
der Hypo

Kern

---

## XXV.

Einige Eigenschaften der Zahlen,  
welche zum Product der ersten  $n$  Primzahlen  
prim und kleiner als dasselbe sind.

Von

Herrn Dr. Franz Walla.

### I.

Es bedeuten  $p_1, p_2, \dots, p_n$  die ersten  $n$  Primzahlen ( $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ );  $P_n$  deren Product  $p_1 p_2 \dots p_n$ ;  $\varphi_n = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_n - 1)$  die Anzahl der im Titel benannten Zahlen und endlich

$$x_1, x_2, \dots, x_{\varphi_n} \quad (1)$$

selbst diese Zahlen.

Man überzeugt sich leicht, dass

$$P_n - x_k = x_{\varphi_n - k + 1}, \quad (2)$$

wobei  $k = 1, 2, \dots, \varphi_n$ , und man schliesst, dass die erste Hälfte der Reihe (1) zwischen 0 und  $\frac{P_n}{2}$ , die zweite Hälfte zwischen  $\frac{P_n}{2}$  und  $P_n$  liegt.

### II.

Indem wir wegen (2) nur die erste Hälfte der Reihe (1) betrachten, gelangen wir zum folgenden Satz











## XXVI.

Ueber gewisse Systeme von Kegelschnitten,  
die mit einander projectivisch sind,  
und deren Erzeugniss.

Von

Herrn Dr. **Eduard Mahler.**

---

Es sei  $K + \lambda K' = 0$  die Gleichung eines Kegelschnittbüschels, so ist der Ort der Punkte, deren Tangentenpaar an irgend einem Elemente dieses Büschels harmonisch geteilt wird durch das Tangentenpaar an einem der Fundamentelemente — etwa  $K = 0$  — ein Kegelschnitt; für jeden andern Kegelschnitt des Büschels bekommen wir einen andern Kegelschnitt; wir haben somit ein ganzes System von unendlich vielen Kegelschnitten, von welchem jedes einzelne Element einem bestimmten Kegelschnitte des Büschels entspricht. Welches ist die Gleichung dieses Systems von Kegelschnitten?

Der Einfachheit halber denken wir uns die beiden Kegelschnitte  $K = 0$  und  $K' = 0$  auf das gemeinsame sich selbst conjugirte Dreieck bezogen und zwar seien die beiden Gleichungen von der Form:

$$K \equiv \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = 0$$

$$K' \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

so ist die Gleichung des durch sie bestimmten Büschels:

$$(\alpha_1 - \lambda)x_1^2 + (\alpha_2 - \lambda)x_2^2 + (\alpha_3 - \lambda)x_3^2 = 0 \quad \text{A)}$$





Nach Ausmultipliciren und gehörigem Reduciren geht B) über in\*)

$$2K - \lambda \left( \frac{K}{\alpha_1} + \frac{K}{\alpha_2} + \frac{K}{\alpha_3} \right) - \lambda K' + \frac{\lambda^2}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} F' = 0 \quad \text{D)}$$

wenn der linke Teil der Gl. C) gleich  $F$  gesetzt wird.

Die Gleichung des gegebenen Büschels war:

$$K - \lambda K' = 0$$

daraus:

$$\lambda = \frac{K}{K'}$$

Setzt man dies in D) ein, so bekommt man die Gleichung des Erzeugnisses von A) und B). Man hat nämlich:

$$2K - \frac{K}{K'} \left[ K \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} \right) + K' \right] + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \frac{K^2}{K'^2} F = 0$$

oder

$$2KK'^2 - K^2K' \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} \right) - KK'^2 + \frac{K^2F}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = 0$$

oder

\*) Es mögen diese Operationen hier ausgeführt werden. Vor Allem geht B) über in

$$\begin{aligned} & x_1'^2 \{ 2\alpha_2 \alpha_3 - \lambda(\alpha_2 + \alpha_3) \} \cdot (\alpha_1^2 - \alpha_1 \lambda) \\ & + x_2'^2 \{ 2\alpha_3 \alpha_1 - \lambda(\alpha_3 + \alpha_1) \} \cdot (\alpha_2^2 - \alpha_2 \lambda) \\ & + x_3'^2 \{ 2\alpha_1 \alpha_2 - \lambda(\alpha_1 + \alpha_2) \} \cdot (\alpha_3^2 - \alpha_3 \lambda) = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & 2\alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 x_1'^2 + 2\alpha_2^2 \alpha_3 \alpha_1 x_2'^2 + 2\alpha_3^2 \alpha_1 \alpha_2 x_3'^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \lambda (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) \\ & - \lambda \{ (\alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_1^2 \alpha_3) x_1'^2 + (\alpha_2^2 \alpha_3 + \alpha_2^2 \alpha_1) x_2'^2 + (\alpha_3^2 \alpha_1 + \alpha_3^2 \alpha_2) x_3'^2 \} \\ & + \lambda^2 [ \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) x_1'^2 + \alpha_2(\alpha_3 + \alpha_1) x_2'^2 + \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2) x_3'^2 ] = 0 \end{aligned}$$

oder durch  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  dividirt:

$$\begin{aligned} & 2K - \lambda \left\{ \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_3} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1} \right) x_1'^2 + \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2} \right) x_2'^2 \right. \\ & \left. + \left( \frac{\alpha_3}{\alpha_1} + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_3} \right) x_3'^2 - (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) \right\} - 2\lambda K' + \frac{\lambda^2 F}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = 0 \end{aligned}$$

oder

$$2K - \lambda \left\{ \frac{K}{\alpha_1} + \frac{K}{\alpha_2} + \frac{K}{\alpha_3} - K' \right\} - 2\lambda K' + \frac{\lambda^2 F}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = 0$$

oder

$$2K - \lambda \left\{ \frac{K}{\alpha_1} + \frac{K}{\alpha_2} + \frac{K}{\alpha_3} + K' \right\} + \frac{\lambda^2 F}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = 0.$$

$$K'^2 - KK' \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} \right) + \frac{KF}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = 0 \quad \text{E)}$$

d. h. das Erzeugniss des Büschels A) und des Systems B) ist eine Curve 6ter Ordnung, die in den Kegelschnitt  $K = 0$  und die durch E) ausgedrückte Curve 4ter Ordnung degenerirt.

Wenn wir E) entwickeln, so haben wir:

$$\begin{aligned} & (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2) (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} \right) \\ & + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2) [\alpha_1 x_1^2 (\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_2 x_2^2 (\alpha_3 + \alpha_1) \\ & + \alpha_3 x_3^2 (\alpha_1 + \alpha_2)] = 0 \end{aligned}$$

oder nach einigen Reductionen:

$$\begin{aligned} & x_1^4 \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) + x_2^4 \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + x_3^4 \left( \frac{\alpha_3}{\alpha_1} + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right) \\ & - x_1^2 x_2^2 \left( 2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} - 2 \right) - x_1^2 x_3^2 \left( 2 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right. \\ & \left. + 2 \frac{\alpha_3}{\alpha_1} + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} - 2 \right) - x_2^2 x_3^2 \left( 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 2 \frac{\alpha_3}{\alpha_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} - 2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Sucht man nun die Schnittpunkte dieser Curve 4ter Ordnung mit den Seiten des Fundamentaldreiecks, so hat man bekanntlich die letzte Gleichung coexistirend zu betrachten mit resp.  $x_3 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = 0$ .

Setzt man aber  $x_3 = 0$ , so erhält man folgende in  $x_1, x_2$  biquadratische Gleichung:

$$x_1^4 \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) + x_2^4 \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) - x_1^2 x_2^2 \left( 2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} - 2 \right) = 0$$

welche die 4 Schnittpunkte der Curve mit  $x_3 = 0$  bestimmt.

Setzen wir

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} &= A, & \frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} &= B, \\ 2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} - 2 &= C \end{aligned}$$

so ist:

$$\frac{x_1}{x_2} = \pm \sqrt{\frac{C \pm \sqrt{C^2 - 4AB}}{2A}}$$

Nun gibt aber der letzte Ausdruck das Teilverhältniss der Schnittpunkte der Curve mit  $x_3 = 0$  bezüglich der beiden auf  $x_3 = 0$  gelegenen





$$0 = \begin{vmatrix} 2K, & -\left[K\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}\right) + K'\right], & \frac{F}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, & 0 \\ 0, & 2K, & -\left[K\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}\right) + K'\right], & \frac{F}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \\ F, & -[K'(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + K], & 2K', & 0 \\ 0, & F, & -[K'(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + K], & 2K' \end{vmatrix}$$

Wie man sieht, ist dasselbe eine Curve 8ter Ordnung; nachdem aber in der Gleichung derselben nur gerade Potenzen von  $x_1, x_2, x_3$  vorkommen (indem  $K, K', F$  solche Functionen 2ten Grades sind, die keine ungrade Potenz von  $x_1, x_2, x_3$  enthalten), so bekommen wir, indem wir  $x_3 = 0$  setzen und somit die Schnittpunkte der Curve mit der betreffenden Seite des Fundamentaldreiecks suchen, zur Bestimmung der Letzteren eine Gleichung 4ten Grades in  $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$ ; sind daher die Lösungen dieser Gleichung 4ten Grades  $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, \alpha_4^2$ , so sind die 8 Schnittpunkte der obigen Curve mit  $x_3 = 0$  gegeben durch:

$$\frac{x_1}{x_2} = \begin{cases} \pm \alpha_1, \\ \pm \alpha_2, \\ \pm \alpha_3, \\ \pm \alpha_4, \end{cases}$$

d. h. die 8 Schnittpunkte gruppieren sich in 4 Punktpaare, von denen ein jedes durch die Ecken des Dreiecks harmonisch geteilt wird.

Wir haben somit den Satz:

„Wenn man das Erzeugniss jener 2 Systeme von Kegelschnitten sucht, von denen das eine so beschaffen ist, dass das von einem Punkte irgend eines Kegelschnitts dieses Systems an den entsprechenden Kegelschnitt des Büschels  $K - \lambda K' = 0$  gezogene Tangentenpaar harmonisch geteilt wird durch das von diesem Punkte an  $K = 0$  gezogene Tangentenpaar und das andere System dieselbe Eigenschaft gegenüber dem Büschel bezügl.  $K' = 0$  hat, so bekommt man eine Curve 8ter Ordnung, die die Seiten des dem gegebenen Büschel sich selbst conjug. Dreiecks in 4 Punktpaaren einer Involution schneidet, deren Doppelpunkte die Dreiecksecken sind.“

Wien, den 26. Januar 1881.











Es ist dies übrigens auch aus dem Grunde klar, da  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$  die Bedingung ist, welcher ein Curvenpunkt zu genügen hat, wenn er ein Wendepunkt sein soll; nun ist aber die Gerade eine Curve mit lauter Wendepunkten, daher sämtliche Punkte derselben der Bedingung  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$  genügen müssen.

Wir wollen jetzt die Curve betrachten, in deren sämtlichen Punkten der Krümmungshalbmesser derselbe ist. Es ist dies der Kreis.

Soll in allen Curvenpunkten der Krümmungsradius gleich  $\varrho$  sein, so müssen sämtliche Curvenpunkte der Gleichung

$$\varrho^2 [Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2] = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$$

genügen, d. h. es müssen alle Curvenpunkte der Gleichung

$$\varrho^2 [(adu + a'dv)^2 + (bdu + b'dv)^2] = (adu + a'dv)^2 + (bdu + b'dv)^2$$

Gentüge leisten, es ist dies also die Differentialgleichung eines Kreises mit dem Radius  $\varrho$ .

Nun kann dieser Gleichung auf viele Arten genügt werden; im Allgemeinen aber kann sie nur bestehen, wenn

$$\varrho(adu + a'dv) = adu + a'dv$$

und

$$\varrho(bdu + b'dv) = bdu + b'dv$$

ist, d. h.

$$\begin{vmatrix} a - a\varrho & a' - a'\varrho \\ b - b\varrho & b' - b'\varrho \end{vmatrix} = 0$$

ist die Beziehung zwischen den Grössen  $u, v$  eines Kreises, oder die Gleichung eines Kreises mit dem Radius  $\varrho$  in unserem allgemeinen Coordinatensysteme.

Wien, den 2. Decbr. 1880.





Ein zweites Axensystem der  $x_2y_2z_2$  werde gebildet von der Tangente, Hauptnormale und Binormale der Curve  $s$  im Punkte  $P$ , und  $x_2y_2z_2$  seien die Coordinaten von  $P_2$ . Hinsichtlich der Fläche sind jene Axen die 2 Hauptkrümmungstangenten und die Normale. Ihre Richtungscosinus gegen die  $x, y, z$  sind (gemäss der Curventheorie)

$$\begin{array}{ccc} f, & g, & h \\ f', & g', & h' \\ l, & m, & n \end{array}$$

es bezeichnen  $\tau, \vartheta$  den Krümmungs- und Torsionswinkel, der Accent die Differentiation nach  $\tau$ . Die Coordinatenrelationen sind dann:

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = f(x_1 - x) + g(y_1 - y) + h(z_1 - z) \\ y_2 = f'(x_1 - x) + g'(y_1 - y) + h'(z_1 - z) \\ z_2 = l(x_1 - x) + m(y_1 - y) + n(z_1 - z) \end{array} \right\} \quad (1)$$

Ein drittes Axensystem der  $x_3y_3z_3$  sei im Raume fest, die  $x_3, y_3$  Axen horizontal in der Grundebene, die  $z_3$  Axe vertical nach oben,  $x_3y_3z_3$  Coordinaten von  $P_1$ ,  $x_4y_4z_4$  von  $P$ . Da sich bei der Wälzung der Krümmungswinkel  $\tau$  auf der Grundebene abwickelt, so sind die Coordinatenrelationen:

$$\left. \begin{array}{l} x_3 = x_4 + x_2 \cos \tau - y_2 \sin \tau \\ y_3 = y_4 + x_2 \sin \tau + y_2 \cos \tau \\ z_3 = z_2 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Zur Bestimmung von  $x_4$  und  $y_4$  (da  $z_4 = 0$ ) wenden wir die Gl. (2) auf den Nachbarpunkt der Gratlinie an, so dass  $PP_1 = \partial s$  wird. Dann wird

$$\begin{array}{l} x_3 = x_4 + \partial x_4; \quad y_3 = y_4 + \partial y_4 \\ x_2 = \partial s; \quad y_2 \text{ (unendlich klein 2. Ordn.)} = 0 \end{array}$$

also

$$\partial x_4 = \partial s \cos \tau; \quad \partial y_4 = \partial s \sin \tau$$

Die Gl. (1) bei constanten  $x_1y_1z_1$  differentiirt geben:

$$\begin{array}{l} \partial x_2 = y_2 \partial \tau - \partial s \\ \partial y_2 = z_2 \partial \vartheta - x_2 \partial \tau \\ \partial z_2 = -y_2 \partial \vartheta \end{array}$$

demzufolge die Gl. (2):

$$\begin{array}{l} \partial x_3 = -z_2 \partial \vartheta \sin \tau \\ \partial y_3 = z_2 \partial \vartheta \cos \tau \\ \partial z_3 = -y_2 \partial \vartheta \end{array}$$



Erzeugende und des Quadrats der Wälzungswinkelgeschwindigkeit.

Aus Gl. (3) geht nun hervor:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2G}} \int \partial \vartheta \sqrt{\frac{Af^2 + Bg^2 + Ch^2 + R^2}{H + lx + my + nz}} \quad (4)$$

## §. 2. Beispiele.

Der Ausdruck der Zeit wird das Integral einer algebraischen Function, wenn die Gratlinie eine linear oder cyklisch tordirte Curve ist, und der Bogen so gewählt wird, dass  $x, y, z$  in algebraischer Relation stehen, überdies im letztern Fall der Radius der Torsionslinie von der Form  $\sqrt{\nu^2 - 1}$  ( $\nu$  Rationalzahl) ist. Wir wählen die cyklisch tordirte Curve für den Radius  $\sqrt{3}$ , wo die Gleichung der Torsionslinie lautet:

$$\tau^2 + \vartheta^2 = 3$$

und nehmen den Bogen proportional der Krümmungsbreite  $\lambda$ ; dann wird

$$\tau = \sqrt{3} \sin \lambda; \quad \vartheta = -\sqrt{3} \cos \lambda; \quad s = e\lambda$$

Dieser Annahme entsprechen, in bequemster Lage der Curve zu den Hauptträgheitsaxen, die Coordinatenwerte:

(5)

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2} e \cos \lambda; \quad y = \frac{1}{2} e (2 + \cos^2 \lambda) \sin \lambda; \quad z = -e \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \lambda \right) \cos \lambda$$

wie sich auf bekannte Weise durch einige Differentiationen bestätigt. Bei Ausführung dieser Rechnung findet man zunächst die Werte:

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \lambda; & g &= \cos^3 \lambda; & h &= \left( \frac{1}{2} + \cos^2 \lambda \right) \sin \lambda \\ l &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \lambda; & m &= \sin^3 \lambda; & n &= -\left( \frac{3}{2} - \cos^2 \lambda \right) \cos \lambda \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

woraus:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= e^2 \left( \frac{1}{2} + \cos^2 \lambda \right); & fx + gy + hz &= -e \sin \lambda \cos \lambda \\ lx + my + nz &= e \left( \frac{3}{2} - \cos^2 \lambda \right) \end{aligned} \quad (7)$$

also:

$$R^2 = e^2 \left( \frac{1}{2} + \cos^4 \lambda \right) \quad (8)$$

daher nach Einführung in (4):



ihr Vorzeichen, mithin ist die Oberfläche darüber hinaus nicht convex. Untersucht man die Bahn des Schwerpunkts in der Nähe der Grenzen, so zeigt sich, dass sie hier Rückkehrpunkte hat, was mit einer endlichen Endgeschwindigkeit unvereinbar ist.

Die Bestimmung (11) ist indes an die Bedingungen geknüpft, dass

$$A > 0; \quad B > 0; \quad 2B - A > 0$$

sein muss; das giebt für  $b$ :

$$b^2 - b - 1 > 0; \quad b^2 + 7b - 1 > 0$$

Man kann beiden durch positive und durch negative  $b$  genügen, nämlich:

$$1) \quad b > \frac{\sqrt{5}+1}{2}; \quad 2) \quad -b > \frac{\sqrt{53}+7}{2}$$

An ersterer Grenze wird

$$A = 0; \quad B = \frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)e^2$$

an letzterer

$$A = 2B = \frac{1}{8}(\sqrt{53}+7)e^2$$

### §. 3. Fernere Beispiele.

Der Fall der Gleichheit zweier Factoren unter der Quadratwurzel, welcher in §. 2. von der elliptischen Function zum Kreisbogen führte, führt unmittelbar das allgemeine hyperelliptische Integral zu einem elliptischen, und zwar einfacherer Form, über. Sei also in (9) identisch

$$\left\{ \frac{3}{4}A + C\left(\frac{1}{2} + \cos^2\lambda\right)^2 \right\} \sin^2\lambda + B \cos^6\lambda + e^2\left(\frac{1}{4} + \cos^4\lambda\right) = (B - C)(\alpha + \cos^2\lambda^2)(\beta + \cos^2\lambda) \quad (15)$$

dann muss sein

$$\begin{aligned} \frac{3A + C}{4} + \frac{1}{8}e^2 &= (B - C)\alpha^2\beta \\ \frac{3}{4}(C - A) &= (B - C)\alpha(\alpha + 2\beta) \\ e^2 &= (B - C)(2\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$\beta = \frac{1}{\gamma} - 2\alpha$$

so werden die Gleichungen:

$$B - C = e^2\gamma$$



im gegenwärtigen Intervall  $> 0$ . Folglich sind alle  $M$  positiv für

$$\alpha > \frac{\sqrt{5}+1}{3}; \quad \alpha < \frac{m_2}{n_2}$$

Für kleinere  $\alpha$  bis  $\alpha = -0,409$  ist  $m_2 < 0$ ,  $n_2 > 0$ , also können nur negative  $\gamma$  genügen. Solange  $\alpha > 1$  muss, wegen  $M_2 < M_1$ ,

$$\gamma < \frac{m_2}{n_2}$$

sein. Für kleinere  $\alpha$ , wo  $n_2, n_3$  ungleiche Vorzeichen haben, genügt weder ein positives noch ein negatives  $\gamma$ . Was  $M_1$  betrifft, so braucht für  $\alpha > 1$  nur  $\gamma < 0$  zu sein. Folglich sind alle  $M$  positiv für

$$1 < \alpha < \frac{\sqrt{5}+1}{3}; \quad \gamma < \frac{m_2}{n_2}$$

Dagegen gibt es keine Lösung für

$$-\frac{\sqrt{5}-1}{3} < \alpha < 1$$

Für kleinere  $\alpha$  bis  $\alpha = -0,7$  muss rücksichtlich  $M_2$  und  $M_3$

$$\frac{m_3}{n_3} < \gamma < \frac{m_2}{n_2}$$

sein; dagegen lässt  $M_1$ , weil  $m_1 < 0$ ,  $n_1 > 0$ , nur negative  $\gamma$  und zwar nur

$$\gamma < \frac{m_1}{n_1}$$

zu. Es muss also sein

$$\frac{m_3}{n_3} < \gamma < \frac{m_1}{n_1} \tag{19}$$

Nun hat man aber:

$$m_1 n_3 - m_3 n_1 = \frac{8}{9}(3\alpha^4 + 4\alpha^2 - 9\alpha) \\ \text{für negative } \alpha \text{ stets } > 0$$

also, da  $n_1$  positiv,  $n_3$  negativ:

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_3}{n_3}$$

folglich genügt kein  $\gamma$  der Bedingung (19), und es hat sich ergeben, dass auch dem Intervall

$$-0,7 < \alpha < -\frac{\sqrt{5}-1}{3}$$

keine Lösung entspricht.





Aus Gl. (16) ist zu ersehen, dass  $1 - 2\alpha\gamma$  stets positiv ist. Dagegen kann  $\gamma$  positiv und negativ sein, und  $\varepsilon$  alle Werte haben. Nur ist, wie aus Gl. (15) erhellt,  $1 - 2\alpha\gamma + \gamma\cos^2\lambda$ , mithin auch  $\varepsilon^2 - \cos^2\lambda$ , stets positiv. Für das elliptische Integral ergeben sich also 3 Formen, begrenzt durch

$$(A) \quad \gamma > 0; \quad (B) \quad 0 > \gamma > -\frac{1-2\alpha\gamma}{\varepsilon^2}; \quad (C) \quad \gamma < -\frac{1-2\alpha\gamma}{\varepsilon^2}$$

Im Falle (A) ist zu setzen \*)

$$\cos \lambda = \varepsilon \operatorname{cn} u; \quad k = \sqrt{\frac{\gamma \varepsilon^2}{1 - 2\alpha\gamma + \gamma \varepsilon^2}}$$

dann wird

$$t = \sqrt{\frac{e(1 - 2\alpha\gamma + \gamma \varepsilon^2)}{6G}} \left\{ \left( \frac{1}{\gamma} + \alpha + 2\varepsilon^2 \right) \operatorname{el} u - \left( \frac{1}{\gamma} - 2\alpha \right) u + \varepsilon^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \right\} \quad (21)$$

Ist  $\varepsilon < 1$ , so oscillirt der Körper, und die Dauer einer Schwingung ist

$$T = 4 \sqrt{\frac{e(1 - 2\alpha\gamma + \gamma \varepsilon^2)}{6G}} \left\{ \left( \frac{1}{\gamma} + \alpha + 2\varepsilon^2 \right) E - \left( \frac{1}{\gamma} - 2\alpha \right) K \right\}$$

Für  $\varepsilon > 1$  ist die Bewegung nur zwischen  $\lambda = 0$  und  $2R$  möglich, wie in §. 2.

Im Falle (B) ist zu setzen:

$$\cos \lambda = \frac{\varepsilon \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}; \quad k = \sqrt{\frac{\gamma \varepsilon^2}{2\alpha\gamma - 1}}$$

dann wird

$$t = \varepsilon \sqrt{\frac{e}{6G(1 - 2\alpha\gamma)}} \left\{ \left( \alpha + 2\varepsilon^2 + \frac{1}{\gamma} \right) \left( \operatorname{el} u - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \right) + \left( 2\alpha - \varepsilon^2 - \frac{1}{\gamma} \right) \left( u - \frac{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^3 u} \right) \right\} \quad (22)$$

Im Falle (C) ist zu setzen:

$$\cos \lambda = \sqrt{2\alpha - \frac{1}{\gamma} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}}; \quad k = \sqrt{\frac{2\alpha\gamma - 1}{\gamma \varepsilon^2}}$$

dann wird:

---

\*)  $\operatorname{sn} u = \sin am u$ ;  $\operatorname{cn} u = \cos am u$ ;  $\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}$   
 $\operatorname{el} u = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u \, du$ ;  $k$  Modul;  $K, E$  Quadranten 1. und 2. Gattung.



$$y = 0; \quad z = 0; \quad R^2 = x^2(1 - f^2) = x^2(g^2 + h^2)$$

also

$$t = \frac{1}{\sqrt{2G}} \int \partial \vartheta \sqrt{\frac{Af^2 + (B + x^2)g^2 + (C + x^2)h^2}{H + xl}} \quad (25)$$

Sei nun  $B = C$ , und  $f, g, h, l$  bestimmt wie in §. 2. Gl. (6); dann kommt:

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{G}} \int \sin \lambda \partial \lambda \sqrt{\frac{3A^2 + B^2 + x^2 - 3(A^2 - B^2 - x^2) \cos^2 \lambda}{2H + x \cos \lambda}}$$

Die Form dieses elliptischen Integrals ist zunächst davon abhängig, ob  $A^2 >$  oder  $< B^2 + x^2$  ist.

Im ersten Falle kann man setzen

$$3 \frac{A - B - x^2}{3A + B + x^2} = \varepsilon^2 < 1$$

Ist dann  $0 < x < 2H\varepsilon$ , so lautet die erforderliche Substitution:

$$\cos \lambda = \frac{1 - 2\operatorname{sn}^2 u}{\varepsilon}; \quad k = \sqrt{\frac{2x}{2H\varepsilon + x}}$$

Diese ergibt:

(26)

$$t = 2 \frac{2H\varepsilon + x}{x} \sqrt{\frac{2(3A + B + x^2)}{3G\varepsilon x}} \left\{ \frac{2H\varepsilon}{x} \operatorname{el} u - \frac{2H\varepsilon - x}{x} u - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \right\}$$

Ist hingegen  $x > 2H\varepsilon$ , so ist zu setzen

$$\cos \lambda = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{2H\varepsilon + x}{x\varepsilon} \operatorname{sn}^2 u; \quad k = \sqrt{\frac{2H\varepsilon + x}{2x}}$$

und man findet:

$$t = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{3A + B + x^2}{3G\varepsilon}} \left\{ 2H\varepsilon \operatorname{el} u + \left(H\varepsilon - \frac{x}{2}\right) u - \left(H\varepsilon + \frac{x}{2}\right) \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \right\} \quad (27)$$

In beiden Fällen wird der Wert  $\lambda = 0$  erreicht, es findet also keine Oscillation statt. Für  $A < B^2 + x^2$  wird die Reduction des Integrals weniger einfach.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Wälzung eines Rotationskegels, dessen Axe Hauptträgheitsaxe ist, für beliebige  $A, B, C$ . Hier haben  $f, g, h$  die Form

$$f = \cos \alpha; \quad g = \sin \alpha \cos \varphi; \quad h = \sin \alpha \sin \varphi$$

( $\alpha$  constant), woraus:



## XXIX.

## Das Aoust'sche Problem in der Curventheorie.

Von

R. Hoppe.

In Darboux et Hoüel Bulletin des sc. math. et astr. VII. 143 stellt sich Aoust die Aufgabe, eine Curve derart zu finden, dass, wenn man von der Einhüllenden ihrer Krümmungsaxe wiederum die Einhüllende der Krümmungsaxe nimmt, letztere der Urcurve congruent ist. Von dieser Aufgabe sagt er, dass ihre vollständige Lösung die Kräfte der Analysis überstiege. Einesteils ist es diese Aeusserung, die mich zur Wiederaufnahme derselben Untersuchung veranlasst, andernteils glaube ich auch im folgenden eine einfachere und durchsichtigere Darstellung des Gegenstands geben zu können.

Bezeichnen  $fgh$ ,  $f'g'h'$ ,  $lmn$  die Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale, Binormale der Urcurve  $s$ ,  $\tau$  und  $\vartheta$  den Krümmungs- und Torsionswinkel ( $\partial\tau$  und  $\partial\vartheta$  die Contingenzwinkel der Tangente und Krümmungsaxe), die Accente Differentiation nach  $\tau$ , die Indices 1 und 2 die Zugehörigkeit zu den 2 oben genannten abgeleiteten Curven, so ist die Gleichung der Einhüllenden der Krümmungsaxe \*)

$$x_1 = x + f's' + l \frac{\partial s'}{\partial \vartheta} \quad (1)$$

Die Relationen der Richtungscosinus, wo wir zugunsten der Einfachheit die positiven Richtungen der Haupt- und Binormale entgegengesetzt wählen:

\*) Hoppe, anal. Curventherie. S. 80. — Arch. LX. S. 387.









## 1. Beispiel.

Die Curve, von der wir ausgehen, die aber noch nicht das notwendige Bogenelement hat, und die wir, soweit dieses unterscheidend ist, mit dem Index 0 kenntlich machen, sei eine Schraubenlinie

$$x_0 = \cos \alpha \cos \varphi; \quad y_0 = \cos \alpha \sin \varphi; \quad z_0 = \varphi \sin \alpha$$

Hieraus findet man:

$$f = -\cos \alpha \sin \varphi; \quad g = \cos \alpha \cos \varphi; \quad h = \sin \alpha$$

$$f' = -\cos \varphi; \quad g' = -\sin \varphi; \quad h' = 0$$

$$l = \sin \alpha \sin \varphi; \quad m = -\sin \alpha \cos \varphi; \quad n = \cos \alpha$$

$$\tau = \varphi \cos \alpha; \quad \vartheta = \varphi \sin \alpha$$

daher nach (10):

$$p = k - \sin^2 \alpha (a \cos \varphi + b \sin \varphi) + c \varphi \sin \alpha \cos \alpha$$

oder, mit Veränderung der willkürlichen Constanten:

$$p = \frac{k + a \cos \varphi + b \sin \varphi + c \varphi}{\cos \alpha}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes werden die Gleichungen der Curve  $s$ :

$$x = \cos \alpha \left\{ k \cos \varphi - \frac{a}{2} \sin^2 \varphi - \frac{b}{2} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) + c (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) \right\}$$

$$y = \cos \alpha \left\{ k \sin \varphi - \frac{a}{2} (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) + \frac{b}{2} \sin^2 \varphi + c (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi) \right\}$$

$$z = \sin \alpha (k \varphi + a \sin \varphi - b \cos \varphi + \frac{c}{2} \varphi^2)$$

$$s = k \varphi + a \sin \varphi - b \cos \varphi - \frac{c}{2} \varphi^2$$

die der Curve  $s_1$ :

$$x_1 = -\frac{1}{\cos \alpha} \left\{ k \sin^2 \alpha \cos \varphi + a (1 + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi) + \frac{b}{2} \cos^2 \alpha (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \right. \\ \left. + c \sin^2 \alpha (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) \right\}$$

$$y_1 = -\frac{1}{\cos \alpha} \left\{ k \sin^2 \alpha \sin \varphi + \frac{a}{2} \cos^2 \alpha (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) + b (1 - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi) \right. \\ \left. + c \sin^2 \alpha (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi) \right\}$$

$$z_1 = \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ k \varphi \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha (-a \sin \varphi + b \cos \varphi) + c (1 + \frac{1}{2} \varphi^2 \sin^2 \alpha) \right\}$$







$$y = \frac{a}{4} \left\{ \lambda \left( \frac{1}{4} - 3 \sin^2 \lambda - 3 \sin^4 \lambda \right) \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \sin^2 \lambda + \frac{1}{8} \sin^4 \lambda + \sin^6 \lambda \right) \sin \lambda \cos \lambda \right. \\ \left. + \frac{b}{4} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 \lambda \right) \sin^6 \lambda + \frac{c}{2} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 \lambda \right) \sin^4 \lambda - \frac{k}{4} (1 + \sin^2 \lambda) \sin^2 \lambda \right\}$$

$$s = \frac{a\sqrt{3}}{2} \left\{ \frac{\lambda}{4} (1 - 6 \sin^2 \lambda) - \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 \lambda - \frac{1}{8} \sin^4 \lambda \right) \sin \lambda \cos \lambda \right. \\ \left. + \frac{b}{4\sqrt{3}} \sin^6 \lambda + \frac{c\sqrt{3}}{8} \sin^4 \lambda - \frac{k\sqrt{3}}{4} \sin^2 \lambda \right\}$$

und die Gl. (7) geben:

$$x_2 = x + \frac{8a}{3}; \quad y_2 = y + \frac{4b}{3}; \quad z_2 = z + 2 \frac{2b + c}{\sqrt{3}}$$

#### 4. Beispiel.

Die Curve  $s_0$  sei eine Krümmungslinie der centralen Fläche 2. Grades:

$$\frac{x_0^2}{a} + \frac{y_0^2}{b} + \frac{z_0^2}{c} = 1$$

In Parametern der Krümmungslinien  $u, v$  dargestellt lauten die Gleichungen der Fläche:

$$x_0^2 = a \frac{c-b}{d} (u-a)(v-a); \quad \text{etc.}$$

wo zur Abkürzung

$$d = (b-c)(c-a)(a-b)$$

gesetzt ist, und die analogen Gleichungen für  $y_0$  und  $z_0$  durch cyklische Vertauschung von  $a, b, c$  erhalten werden. Ein constantes  $v$  giebt die beliebige Krümmungslinie  $s_0$ .

Es sei ferner zur Abkürzung:

$$U = (u-a)(u-b)(u-c); \quad V = (v-a)(v-b)(v-c) \\ \alpha = a+b+c; \quad \beta = bc+ca+ab; \quad \gamma = abc$$

Durch Differentiation und Bildung der Quadratsumme findet man zuerst:

$$f = \sqrt{\frac{a(b-c)(v-a)(u-b)(u-c)}{du(u-v)}}; \quad \text{etc.}$$

$$\frac{\partial s_0}{\partial u} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u(v-u)}{U}}$$

Eine neue Differentiation giebt:



wo  $A, B, C$  constante, einzeln entweder reelle oder rein imaginäre Grössen sind.

Die 9 Doppelintegrale, aus denen  $x, y, z$  bestehen, reduciren sich durch folgende Betrachtung auf 3 von gleicher Form. Es ist nämlich

$$f \partial \tau = l \partial \vartheta - \partial f'$$

daher transformirt sich Gl. (13) in

$$\begin{aligned} x &= \int \{ l \partial \vartheta \int (Al + Bm + Cn) \partial \vartheta \} - \int \{ \partial f' \int (Al + Bm + Cn) \partial \vartheta \} \\ &= \frac{1}{2} A (\int l \partial \vartheta)^2 + B \int (l \partial \vartheta \int m \partial \vartheta) + C \int l \partial \vartheta \int n \partial \vartheta \\ &\quad - f' \int (Al + Bm + Cn) \partial \vartheta + \int (Al + Bm + Cn) f' \partial \vartheta \end{aligned}$$

Hiernach bleiben in  $x$  zwei, im ganzen 6 Doppelintegrale, die jedoch pairwise in Relationen der Form stehen:

$$\int (m \partial \vartheta \int n \partial \vartheta) + \int (n \partial \vartheta \int m \partial \vartheta) = (\int m \partial \vartheta) (\int n \partial \vartheta)$$

Von den hinzugekommenen Integralen

$$\int l f' \partial \vartheta, \int m f' \partial \vartheta, \int n f' \partial \vartheta$$

ist das erste logarithmisch, die beiden andern elliptisch.













$$A_n = \frac{2}{h} \int_0^h e^{-St} \cos \frac{n\pi}{h} t \cdot dt = \frac{2}{h} \cdot \frac{S}{S^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} [1 - \cos n\pi \cdot e^{-S^2}] \quad *)$$

ferner

$$\begin{aligned} e^{-St} \cos(k\rho - st + \alpha) &= \frac{1}{2} A_0 \cos(k\rho - st + \alpha) \\ &+ \frac{1}{2} A_1 \cos\left[k\rho - \left(s + \frac{\pi}{h}\right)t + \alpha\right] + \frac{1}{2} A_2 \cos\left[k\rho - \left(s + \frac{2\pi}{h}\right)t + \alpha\right] + \dots \\ &+ \frac{1}{2} A_1 \cos\left[k\rho - \left(s - \frac{\pi}{h}\right)t + \alpha\right] + \frac{1}{2} A_2 \cos\left[k\rho - \left(s - \frac{2\pi}{h}\right)t + \alpha\right] + \dots \\ &= \frac{1}{2} A_0 \cos(k\rho - st + \alpha) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left[k\rho - \left(s \pm \frac{n\pi}{h}\right)t + \alpha\right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{aA_0}{2} \cos(k\rho - st + \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{aA_n}{2} \cos\left[k\rho - \left(s \pm \frac{n\pi}{h}\right)t + \alpha\right] \\ \eta &= \frac{bA_0}{2} \cos(k\rho - st + \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{bA_n}{2} \cos\left[k\rho - \left(s \pm \frac{n\pi}{h}\right)t + \beta\right] \\ \zeta &= \frac{cA_0}{2} \cos(k\rho - st + \gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cA_n}{2} \cos\left[k\rho - \left(s \pm \frac{n\pi}{h}\right)t + \gamma\right] \end{aligned}$$

$\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  sind also von der angegebenen Form; das Integralsystem (7) der Differentialgleichungen (1) ist also der analytische Ausdruck für Bewegungen der Aetherteilchen, welche zusammengesetzt-farbige Licht verursachen.

## §. 5.

Die Bewegungen sind nach dem Superpositionsprincipe zusammengesetzt aus einfachen Schwingungen von den Perioden

\*) Der Wert dieses Integrals wird am leichtesten folgendermassen gefunden

$$\begin{aligned} \int_0^h e^{-St} \cos \frac{n\pi}{h} t \cdot dt &= J, & \int_0^h e^{-St} \sin \frac{n\pi}{h} t \cdot dt &= J', \\ J + iJ' &= \int_0^h e^{-St} \cdot e^{\frac{n\pi}{h} ti} dt = \int_0^h e^{\left(\frac{n\pi}{h} i - S\right)t} dt \end{aligned}$$

u. s. f.













bei, so wird, wenn  $A$  sich auf der Axe verschiebt, die Grösse des Bildes in  $a$  stets durch  $y = fa$  ausgedrückt. Die Richtung des Bildes ändert sich, wenn  $a$  durch  $f$  hindurchgeht.

Ein System brechender Flächen bestehe aus zwei Teilen, I und II, für welche einzeln die Lage der eigentlichen und uneigentlichen Hauptpunkte bekannt seien. Die auf beide Systeme bezüglichen Grössen mögen durch die Indices (1) und (2) unterschieden werden. Der Abstand der Brennpunkte  $f_1$  und  $F_2$  sei  $c$ . Um die optischen Wirkungen des zusammengesetzten Systems einfach darzustellen, muss man dessen Hauptpunkte kennen. Die auf letztere bezüglichen Grössen mögen durch die entsprechenden Buchstaben in Klammern bezeichnet werden. Es ist:

$$\frac{L_1}{l_1} = -\frac{\kappa_1}{y_1}, \quad \frac{L_2}{l_2} = -\frac{x_2}{\eta_2}$$

Für das zusammengesetzte System ist  $(L) = L_1$ ,  $(l) = l_2$ ,  $l_1 = L_2$ , also

$$\frac{(L)}{(l)} = \frac{\kappa_1 x_2}{y_1 \eta_2}$$

Da  $y_1 + x_2 = c$ , so hat man für die Hauptpunkte, für die  $(L) = (l)$  sein muss:

$$\frac{y_1}{\kappa_1} = \frac{x_2}{\eta_2} = \frac{c}{\eta_2 + \kappa_1}$$

folglich auch

$$\frac{\eta_1}{x_1} = \frac{\kappa_2}{y_2} = \frac{c}{\eta_2 + \kappa_1}$$

Für die uneigentlichen Hauptpunkte ist  $(L) = -(l)$ , also:

$$\frac{y_1}{\kappa_1} = -\frac{x_2}{\eta_2} = \frac{c}{\kappa_1 - \eta_2}$$

und

$$\frac{\eta_1}{x_1} = -\frac{\kappa_2}{y_2} = \frac{c}{\kappa_1 - \eta_2}$$

Teilt man also den Abstand  $f_1 F_2 = c$  im Verhältniss  $y_1 : x_2 = \kappa_1 : \eta_2$  und betrachtet den Teilpunkt als leuchtenden Punkt des zwischen I und II befindlichen Mediums, so ist sein durch (I) erzeugtes Bild im ersten Medium der Hauptpunkt  $(H)$ , sein durch (II) erzeugtes Bild im letzten Medium ist  $(h)$ . Für die uneigentlichen Hauptpunkte hat man  $c$  im Verhältniss  $\kappa_1 : -\eta_2$  zu teilen. Mittels der über den Durchmessern  $G_1 g_1$  und  $G_2 g_2$  beschriebenen Kreise, die von den Punkten  $P_1, P_2$  durchlaufen werden, sind also die Hauptpunkte leicht zu erhalten.







Axe und zieht in demselben Punkt eine Tangente, so treffen diese die Axe in zusammengehörigen Punkten. Ist die Grösse des Gegenstandes  $= \eta = \frac{r}{2}$ , so wird die des Bildes durch die Entfernung des Bildpunktes vom Brennpunkt angegeben. Ort und Grösse des Bildes sind dieselben, ob die Fläche auf der convexen oder concaven Seite spiegelt, die Richtung des Bildes ist entgegengesetzt, weil im ersten Fall  $\eta$  positiv, im andern negativ ist.





XXXII.

Ueber magische Rechtecke mit ungeraden  
Seitenzahlen.

Von

**Th. Harmuth.**

Die Aufgabe, das magische Rechteck mit den Seitenzahlen oder Argumenten  $p$  und  $q$  zu bilden, d. h. die Zahlen

$$1, 2, 3 \dots pq$$

(worin  $p$  und  $q$  ungerade sind) so auf  $q$  Reihen mit je  $p$  Gliedern zu verteilen, dass alle Verticalreihen unter sich gleiche Summen und alle Horizontalreihen unter sich gleiche Summen haben, würde, wie leicht ersichtlich, allgemein lösbar sein, sobald es gelänge, das System:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,p} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{p-1,1} & a_{p-1,2} & a_{p-1,3} & \dots & a_{p-1,p} \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \dots & a_{p,p} \\ a_{p+1,1} & a_{p+1,2} & a_{p+1,3} & \dots & a_{p+1,p} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{q,1} & a_{q,2} & a_{q,3} & \dots & a_{q,p}, \end{array}$$

worin  $p < q$  und  $a_{r,s} = (r-1)p + s$  angenommen ist, so umzuformen, dass









$$\begin{array}{ccccc} a_{k+1,1} & a_{1,2} & a_{2k+1,3} & a_{k+1,4} & a_{k+1,5} \\ a_{k+2,1} & a_{k+1,2} & a_{2k-1,3} & a_{1,4} & a_{k+2,5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2k-2,1} & \frac{a_{k-1}}{2},_2 & a_{7,3} & \frac{a_{k+5}}{2},_4 & a_{2k-2,5} \\ & \cdot & & & \\ a_{2k-1,1} & \frac{a_{k+5}}{2},_2 & a_{5,3} & \frac{a_{k-1}}{2},_4 & a_{2k-1,5} \\ a_{2k,1} & \frac{a_{k+1}}{2},_2 & a_{3,3} & \frac{a_{k+3}}{2},_4 & a_{2k,5} \\ a_{2k+1,1} & \frac{a_{k+3}}{2},_2 & a_{1,3} & \frac{a_{k+1}}{2},_4 & a_{2k+1,5} \end{array}$$

Der erste Teil dieses Systems ist vollständig symmetrisch auf beiden Seiten von der Mitte aus gebaut, der zweite Teil ist in den äusseren Reihen ganz, in der zweiten und vierten alternierend symmetrisch.

Dass sich hieraus ebenfalls eine Speciallösung für  $n = 15, 35 \dots$  ergibt, wird nach dem Vorigen nur der Erwähnung bedürftig.

§. 3. Weiter ergibt sich, dass auch die Formen

$$R(n, (2n-1)n), \quad R(n, (3n-2)n), \quad \dots \quad R(n[(k+1)n-k]n)$$

sich auf  $Q(n)$  reduciren lassen.

Man stelle die  $2n-1$  Quadrate, welche gebildet sind aus den Zahlen:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \text{bis} & n^2 & \text{mit den Verticalreihen} & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots a_{1,n} \\ n^2+1 & ,, & 2n^2 & ,, & ,, & a_{2,1} & a_{2,2} \dots a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (2n-2)n^2+1 & ,, & (2n-1)n^2 & ,, & ,, & a_{2n-1,1} & a_{2n-1,2} \dots a_{2n-1,n} \end{array}$$

direct unter einander, so haben die Gesamtverticalen wieder dieselbe Summe. Die Anordnung der einzelnen  $a$  muss also so geschehen, dass auch in den Horizontalreihen die Summe der vorderen Indizes gleich wird, und zwar:

$$= \frac{1}{2n-1} ((n+2n+3n+\dots+(2n-1)n) = n^2$$

Das erreicht man, wie leicht ersichtlich, durch folgende, auf die Gesamtverticalen ohne Einfluss bleibende Anordnung:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1} & a_{3,2} & a_{5,3} & \dots & a_{2n-5,n-2} & a_{2n-3,n-1} & a_{2n-1,n} \\ a_{2,1} & a_{4,2} & a_{6,3} & \dots & a_{2n-4,n-2} & a_{2n-2,n-1} & a_{n,n} \\ a_{3,1} & a_{5,2} & a_{7,3} & \dots & a_{2n-3,n-2} & a_{2n-1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{4,1} & a_{6,2} & a_{8,3} & \dots & a_{2n-2,n-2} & a_{1,n-1} & a_{n+1,n} \\ a_{5,1} & a_{7,2} & a_{9,3} & \dots & a_{2n-1,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{6,1} & a_{8,2} & a_{10,3} & \dots & a_{1,n-2} & a_{3,n-1} & a_{n+2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$













nicht die Form  $6k+3$  hat. Aber da diese Form keine Primzahlen enthält, ist die Lösung eine allgemeine.

§. 10. Nun wäre zu fragen, wie weit dieses Verfahren unter entsprechenden Modificationen eine allgemeine Behandlung zulässt. Es würden demnach die Differenzenreihen in allgemeinen Zahlen zu bestimmen sein. Man gehe von den mittelsten drei Verticalen des für  $R(2m+1, 2n+1)$  zu Grunde liegenden Systems

1	2	3	. . . $2m$	$2m+1$
$2m+2$	$2m+3$	$2m+4$	. . . $4m+1$	$4m+2$
$4m+3$	$4m+4$	$4m+5$	. . . $6m+2$	$6m+3$
. . . . .				

aus und sondere  $V_m$  und  $V_{m+2}$  ab, da  $V_{m+1}$  ohne Weiteres die verlangte Summe gibt und nur nach Massgabe von §. 2. umgestellt zu werden braucht. Nun hat man

$V_m$	$V_{m+2}$
$m$	$m+2$
$3m+1$	$3m+3$
$5m+2$	$5m+4$
$7m+3$	$7m+5$
. . . . .	. . . . .
$(4n-1)m+2n-1$	$(4n-1)m+2n+1$
$(4n+1)m+2n$	$(4n+1)m+2n+2$

Nach erfolgter Umstellung hat man dagegen:

$V_m$	$V_{m+2}$
$m$	$(4n+1)m+2n+2$
$3m+1$	$(4n-3)m+2n$
$5m+2$	$(4n-7)m+2n-2$
. . . . .	. . . . .
$(2n-1)m+n-1$	$5n+4$
$(2n+1)m+n$	$m+2$
<hr/>	
$(2n+3)m+n+1$	$(4n-1)m+2n+1$
$(2n+5)m+n+2$	$(4n-5)m+2n-1$
$(2n+7)m+n+3$	$(4n-9)m+2n-3$
. . . . .	. . . . .
$(4n-1)m+2n-1$	$7m+5$
$(4n+1)m+2n$	$3m+3$

worin durch den wagrechten Strich die beiden Teile der Differenzenreihe  $\Delta$  angedeutet worden sind. Bezeichnet man dieselben mit  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$ , so hat man:

$\Delta_1 = 4nm+2n+2$	$\Delta_2 = (2n-4)m+n$
$(4n-6)m+2n-1$	$(2n-10)m+n-3$
$(4n-12)m+2n-4$	$(2n-16)m+n-6$
. . . . .	. . . . .

















$$\begin{array}{ccc}
 V_1 & V_2 & V_3 \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 V_{m-4} & V_{m-3} & V_{m-2} \\
 V_{m+4} & V_{m+5} & V_{m+6} \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 V_{2m-1} & V_{2m} & V_{2m+1}
 \end{array}$$

und combinire sie mit dem vorigen nach §. 6. Die beiden restirenden Verticalreihen  $V_{m-1}$  und  $V_{m+3}$  ordne man, wie früher, eine steigend, die andre fallend und bestimme ihren nun geraden Ausgleich  $2(2n+1)$  nach §. 11.

Ist endlich  $2m+1$  von der Form  $6k+1$ , so behandle man ebenso auch noch das Verticalenpaar  $V_{m-5}$  und  $V_{m+7}$ , dessen Ausgleich dann ebenfalls gerade, nämlich  $6(2n+1)$  ist; und combinire ausser

$$V_m \quad V_{m+1} \quad V_{m+2}$$

zu Teilrechtecken successive die Verticalen:

$$\begin{array}{ccc}
 V_1 & V_2 & V_3 \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 V_{m-8} & V_{m-7} & V_{m-6} \\
 V_{m-1} & V_{m-3} & V_{m-2} \\
 V_{m+4} & V_{m+5} & V_{m+6} \\
 V_{m+8} & V_{m+9} & V_{m+10} \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 V_{2m-1} & V_{2m} & V_{2m+1}
 \end{array}$$

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich leicht aus §. 6. Da diese Lösung nur gerade Ausgleichungen verlangt, ist auch  $R(2m+1, 2m+3)$  durch dieselbe darstellbar.

Es ist demnach die Darstellbarkeit von  $R(p, q)$  für zwei beliebige ungerade Argumente nachgewiesen.

§. 13. Geht man von einer natürlichen Verticalenanordnung der zu behandelnden Zahlen aus, so lässt sich ebenfalls eine ziemlich allgemeine Darstellung der Rechtecke ableiten.

Für  $R(3, 5)$  hätte man zunächst die Anordnung:

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 6 & 11 \\
 2 & 7 & 12 \\
 3 & 8 & 13 \\
 4 & 9 & 14 \\
 5 & 10 & 15
 \end{array}$$



$V_1$	$V_3$	$(V_3)-(V_1)$
1	$6n+3$	$6n+2$
2	$6n+1$	$6n-1$
3	$6n-1$	$6n-4$
...	...	...
$n+1$	$4n+3$	$3n+2$
$n+2$	$6n+2$	$5n$
$n+3$	$6n$	$5n-3$
$n+4$	$6n-2$	$5n-6$
...	...	...
$2n+1$	$4n+4$	$2n+3$

Der Ausgleich ist  $q^2 = (2n+1)^2$ . Die durch den wagerechten Strich getrennten beiden Teile von  $\mathcal{A}$  mögen wieder  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  heissen; die zu beantwortende Frage lautet dann:

Lässt sich aus den Reihen

$$\mathcal{A}_1 = 6n+2, 6n-1, 6n-4 \dots 3n+8, 3n+5, 3n+2$$

$$\mathcal{A}_2 = 5n, 5n-3, 5n-6 \dots 2n+6, 2n+3$$

durch einfache Addition die Summe  $q^2 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$  darstellen?

Die Untersuchung sondert zunächst den Fall

$$q \equiv 3, \text{ mod. } 6, \text{ also } 2n+1 = 6k+3 \text{ ab.}$$

Für diesen überzeugt man sich zunächst sehr leicht, dass, da

$$\mathcal{A}(9) = 26, 23, 20, 17, 14; 20, 17, 14, 11 \text{ ist,}$$

der Ausgleich  $9^2 = 81$  nicht dargestellt werden kann.

Ferner sieht man sehr leicht, dass die Glieder in  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  allgemein für diesen Fall unter einander congruent nach dem Modul 3 sind. Drückt man daher diese Reihen unter Zugrundelegung der Voraussetzung  $2n+1 = 6k+3$  durch  $k$  aus, so erhält man:

$$\mathcal{A}_1 = 18k+8, 18k+5, 18k+2 \dots 9k+11, 9k+8, 9k+5$$

$$\mathcal{A}_2 = 15k+5, 15k+2, 15k-1 \dots 6k+8, 6k+5.$$

Nun besteht die identische Gleichung:

$$(6k+3)^2 = (2k+1)(12k+14) + 2k+1)(6k-5).$$

Das erste der rechtsstehenden Glieder ergibt sich durch Addition folgender Glieder aus  $\mathcal{A}_1$ :

$$\begin{array}{r} 12k+14 \\ 12k+17 \quad + 12k+11 \\ 12k+20 \quad + 12k+8 \\ \dots \dots \dots \\ 15k+11 \quad + 9k+17 \\ 15k+14 \quad + 9k+14. \end{array}$$

Dieser Ausdruck ist also immer darstellbar, wenn die Glieder in  $\mathcal{A}_1$  dazu ausreichen, d. h. wenn



enthalten. Die Methode ist also zulässig, sobald die Glieder so zahlreich vorhanden sind, dass diese drei Paare zur Bestimmung von  $(n-2)(4n+1)$  entbehrt werden können, mithin da aus  $\mathcal{A}_1$  obnehin die Glieder  $6n+2$  und  $6n-1$  nicht in Betracht gezogen werden dürfen und  $\mathcal{A}_1$ ,  $n+1$ ,  $\mathcal{A}_2$  dagegen  $n$  Glieder enthält, sobald

$$(n+1)-5 = n-4 \geq \frac{n-2}{2}, \quad \text{d. h. sobald} \\ n \geq 6 \text{ ist.}$$

Für den einzigen ausgeschlossenen Fall  $n=0$  wird der Begriff des magischen Rechteckes hinfällig, also ist die Gültigkeit eine allgemeine.

b. Ist ferner  $n \equiv 2, \text{ mod. } 6$ , so hat man von derselben identischen Gleichung

$$(2n+1)^2 = (n-2)(4n+1) + 11n+3$$

auszugehen, das erste Glied ebenso wie in a., das zweite durch die Identität

$$11n+3 = 3n+1 + 5n+3n+2$$

zu bestimmen. Von den drei Zahlen rechts steht die erste und zweite in  $\mathcal{A}_2$ , die dritte in  $\mathcal{A}_1$ . Die zweite und dritte bilden eins der Paare, welche sich zu  $2(4n+1)$  ergänzen. Danach ist leicht zu entscheiden, welche Zahlen zur Herstellung dieser Gliederpaare gebraucht werden können. Achulich, wie vorher, findet man als Bedingung für die Löslichkeit

$$n-3 \geq \frac{n-2}{2}, \quad n \geq 4.$$

Für den einzigen hierdurch ausgeschlossenen Fall  $n=2$ , welcher  $R(3,5)$  entspricht, ist eine mechanische Lösung gezeigt worden.

c. Es sei ferner  $n \equiv 3, \text{ mod. } 6$ . Die identische Gleichung, von welcher dann vorteilhaft auszugehen ist, lautet:

$$(2n+1)^2 = (n-1)(4n+4) + 4n+5.$$

Das zweite Glied rechts steht direct in  $\mathcal{A}_1$ ; das erste bestimmt man durch folgende Zusammenstellung von  $\frac{n-1}{2}$  Gliederpaaren, ein Glied jedesmal aus  $\mathcal{A}_1$  und eins aus  $\mathcal{A}_2$  genommen, deren jedesmalige Summe  $2(4n+4)$  ist. Diese Glieder sind

$$\begin{array}{rcl} 6n+2 & & +2n+6 \\ 6n-1 & & +2n+9 \\ 6n-4 & & +2n+12 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Dieselben sind so zu wählen, dass das Paar

$$4n+5 \quad +4n+3$$



übersprungen wird, weil  $4n+5$  schon für das Restglied verbraucht wurde. Sobald also die  $n$  Glieder von  $\mathcal{A}_2$ , von denen  $4n+3$  und  $2n+3$  nicht gebraucht werden dürfen, ausreichen, ist dies Glied und damit  $(2n+1)^2$  darstellbar. Die Bedingung ist demnach

$$n-2 \geq \frac{n-1}{2}, \quad n \geq 3.$$

Die Formel ist demnach ganz allgemein anzuwenden.

d. Ist endlich  $n \equiv 5 \pmod{6}$ , so ist die Darstellung ganz analog, nur steht das Glied  $4n+5$  dann in  $\mathcal{A}_2$ . Das zu überspringende Paar ist demnach

$$4n+3 \quad +4n+5.$$

Daraus erklärt sich leicht, dass die Bedingungsgleichung

$$n \geq 3.$$

durch diese Aenderung nicht beeinflusst wird. Also ist  $R(3, q)$  auch auf diesem Wege allgemein darstellbar.

§. 14. Um zu untersuchen, in welchen Fällen  $R(5, q)$  in analoger Weise aus der Anordnung:

$$\begin{array}{cccc} 1 & q+1 & . & . & 4q+1 \\ 2 & q+2 & . & . & 4q+2 \\ . & . & . & . & . \\ q & 2q & . & . & 5q \end{array}$$

abzuleiten ist, ordne man wieder die drei inneren Verticalen nach §. 2., die beiden äusseren, eine steigend, die andere fallend:

$$\begin{array}{cc} 1 & 5q \\ 2 & 5q-1 \\ 3 & 5q-2 \\ . & . \\ q & 4q+1. \end{array}$$

Dann haben wieder alle Horizontalreihen und  $V_3$  direct die verlangte Summe,

$$\begin{array}{l} V_2 \text{ ist um } q^2 \text{ zu klein, } V_4 \text{ um } q^2 \text{ zu gross} \\ V_1 \text{ „ „ } 2q^2 \text{ „ „ } V_5 \text{ „ } 2q^2 \text{ „ „} \end{array}$$

Die innere Differenzreihe  $(V_4) - (V_2)$  ist mit  $(V_3) - (V_1)$  im vorigen Paragraphen identisch, bedarf also keiner weiteren Auseinandersetzung. Ersetzt man in der äusseren Differenzreihe wieder  $q$  durch  $2n+1$ , so hat man die Frage:

Wann ist aus den Gliedern der Reihe

$$\mathcal{A}' = 1(2n+1), 1(2n+2), 1(2n) \dots 2n+1 \dots 6n+6, 6n+1$$

durch einfache Addition der Ausdruck

$$2n^2 = 2n^2 - 2n + 2$$

darstellbar?







$$(2n+1)^2 \cdot c = (4cn+4)(n-1) + (8c-4)n + c + 4.$$

Das erste Glied rechts erhält man wieder durch Verbindung eines einzelnen Gliedes mit  $\frac{n-2}{2}$  Paaren:

$$\begin{array}{rcl} & 4cn+4 & \\ 4cn+2 & & +4cn+6 \\ 4cn & & +4cn+8 \\ 4cn-2 & & +4cn+10 \\ . & . & . \end{array}$$

wenn  $n$  gerade ist, resp. durch  $\frac{n-1}{2}$  Paare ohne das einzelne Glied, wenn  $n$  ungerade ist.

Das zweite Glied rechts ergibt sich beispielsweise durch Addition von

$$(4c-2)n+c \quad \text{und} \quad (4c-2)n+4.$$

Nicht zu verwenden sind demnach für das erste Glied die Zahlen, welche das zweite bestimmen, und deren Ergänzungsglieder, und da das letzte zur Verwendung geeignete Gliederpaar durch

$$(4c-2)n+2c+4 \quad \text{und} \quad (4c+2)n-2c+4$$

gebildet wird, die beiden ungeraden und die nach dem letzten der eben genannten noch folgenden  $2c-2$  Glieder. Man hat demnach als Löslichkeitsbedingung

$$\begin{aligned} 2n+1 &\geq (n-1)+2c+4 \\ n &\geq 2c+2 \quad \text{für gerade } n \end{aligned}$$

und analog, weil dann das Anfangsglied  $4cn+4$  noch abzurechnen ist,

$$n \geq 2c+3 \quad \text{für ungerade } n.$$

Beide Bedingungen lassen sich zusammenfassen in die eine:

$$n \geq 2c+2.$$

Wenn  $c=m$ , d. h. wenn es sich um den Ausgleich für das äusserste Verticalenpaar handelt, sind diese Grenzen um 4 zu verringern, weil dann ungerade Differenzenglieder wegfallen und deshalb 2 Gliederpaare mehr zur Bestimmung des ersten Teiles in der Ausgleichsidentität verwendet werden können.



Eine im Sinne des §. 12. für das vorliegende System getroffene Anordnung würde übrigens noch günstigere Löslichkeitsbedingungen ergeben, doch bietet dieselbe wohl zu wenig Neues, um mehr als einer Erwähnung zu bedürfen.

Ebenso könnte auch noch erwähnt werden, dass magische Rechtecke, deren erstes Argument  $> 3$  ist, auch in der Weise herstellbar sind, dass man zunächst die mittelsten  $3q$  Zahlen zur Herstellung eines Rechteckes nach §. 7 verwendet, die übrigen Zahlen dagegen nach den letzten Paragraphen behandelt. Die Umkehrung dieses Verfahrens, wonach die drei mittelsten Verticalen nach §. 13. geordnet würden und für die übrigen Zahlen eine Anordnung nach §. 8. bis 12. zu bestimmen wäre, ist dagegen, wie leicht nachweisbar ist, unzulässig.

Berlin, 10. März 1881.

---

## XXXIII.

Ueber den Winkel von  $n$  Dimensionen.

Von  
R. Hoppe.

---

Eine allseitig begrenzte lineare  $(n-1)$ dehnung  $V$  sei der Ort eines variablen Punktes  $P$ , ferner  $C$  ein fester Punkt im normalen Abstände  $CB = h$  von jener  $(n-1)$ dehnung. Dann ist der Ort der Geraden  $CP$  eine allseitig begrenzte lineare  $n$ dehnung  $N$ , die wir eine  $n$ dehnige Pyramide nennen können, obwol der Name für 2 Dimensionen, d. i. für das Dreieck, nicht in Gebrauch ist, und zwar heisse  $V$  die Basis und  $C$  die Spitze der Pyramide.

Wir schneiden auf dem Radiusvector  $CP = \varrho$  die Strecke  $CQ = 1$  ab. Dann stellt der von  $Q$  gleichzeitig durchlaufene Ort  $W$  dasjenige dar, was für 2 und 3 Dimensionen den Winkel an der Spitze misst und was wir auch für jede Dimensionszahl so nennen wollen.

Erzeugt nun  $P$  das Element  $\partial V$ , in allen Richtungen unendlich klein, und man schneidet die Pyramide  $\partial N$  über der Basis  $\partial V$  parallel  $V$  von  $Q$  aus durch eine lineare  $(n-1)$ dehnung, so ist die Pyramide über dem Schnitt als Basis ähnlich der Pyramide  $\partial N$ , verhält sich also zu ihr  $= 1 : \varrho^n$ . Sie ist aber unendlich klein  $(n-1)$ ter Ordnung, differirt hingegen von der Pyramide auf der Basis  $\partial W$  nur in  $n$ ter Ordnung; folglich kann man letztere Pyramide dafür substituiren.

Jede  $n$ dehnige Pyramide ist nun gleich dem Product der Basis und der Höhe dividirt durch  $n$ ; drückt man hiernach beide Pyramiden aus, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{n} \partial W : \frac{h}{n} \partial V = 1 : \varrho^n$$

Setzt man  $BP = r$ , so wird  $\varrho^2 = h^2 + r^2$ , folglich

$$W = h \int \frac{\partial V}{(h^2 + r^2)^{\frac{n}{2}}}$$

ein Ausdruck der offenbar von der Linieneinheit unabhängig ist.

Da die Gerade  $r$  innerhalb  $V$  liegt, so ist die Berechnung von  $W$  auf Integrationen zurückgeführt, welche die Grenzen einer linearen  $(n-1)$ fachen Mannichfaltigkeit nicht überschreiten, insbesondere für  $n = 4$  auf eine Kubatur.

---















périodes  $(2^i, 1)$ ,  $(2^i, g^{2^{2^i}-i-1})$  ( $g$  étant la racine primitive) le signe  $+$  du radical appartient à la première et le signe  $-$  à la seconde; car en dernière analyse

$$\begin{aligned}(2^i, 1) &= 2 \left\{ \cos \frac{p}{n} + \cos \frac{2^2 p}{n} + \cos \frac{2^4 p}{n} + \cos \frac{2^6 p}{n} \dots + \cos \frac{2^{2^i-2} p}{n} \right\} \\ &= 2 \left\{ \cos \frac{2^2}{n} \frac{p}{4} + \cos \frac{2^4}{n} \frac{p}{4} + \cos \frac{2^6}{n} \frac{p}{4} + \cos \frac{2^8}{n} \frac{p}{4} \dots + \cos \frac{2^{2^i}}{n} \frac{p}{4} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2^i, g^{2^{2^i}-i-1}) &= 2 \left\{ \cos \frac{2p}{n} + \cos \frac{2^3 p}{n} + \cos \frac{2^5 p}{n} + \cos \frac{2^7 p}{n} \dots + \cos \frac{2^{2^i-1} p}{n} \right\} \\ &= 2 \left\{ \cos \frac{2^3}{n} \frac{p}{4} + \cos \frac{2^5}{n} \frac{p}{4} + \cos \frac{2^7}{n} \frac{p}{4} + \cos \frac{2^9}{n} \frac{p}{4} \dots + \cos \frac{2^{2^i+1}}{n} \frac{p}{4} \right\}\end{aligned}$$

et en comparant termes à termes les valeurs de ces deux périodes, on voit que ceux de  $(2^i, 1)$  sont plus grands que leurs correspondans dans  $(2^i, g^{2^{2^i}-i-1})$  dont le dernier est même négatif, d'où il résulte  $(2^i, 1) > (2^i, g^{2^{2^i}-i-1})$ . On trouve de même  $(2^{i-1}, 1) > (2^i, g^{2^{2^i}-i-1})$  etc. et plus généralement (en considérant comme plus grandes celles des périodes qui ont une valeur négative moins grande, et employant les différentes puissances de deux à la place des puissances de la racine primitive qui leur sont congruantes, puissances qui dépendent du choix de cette racine

$$(2^{i-1}, 1) > (2^{i-1}, 2) > (2^{i-1}, 4) > (2^{i-1}, 8)$$

$$\begin{aligned}(2^{i-2}, 1) &> (2^{i-2}, 2) > (2^{i-2}, 4) > (2^{i-2}, 8) > (2^{i-2}, 2^4) > (2^{i-2}, 2^5) \\ &> (2^{i-2}, 2^6) > (2^{i-2}, 2^7) \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$(2, 1) > (2, 2) > (2, 2^2) > (2, 2^3) \dots \dots > (2, 2^{2^i-1})$$

Par exemple, pour  $p = 2^{2^2} + 1$ , 2 est simplement résidu quarré et on trouve

$$\begin{aligned}(4, 1) &> (4, 9) & p=g=3 \text{ donne } g^{14} &\equiv 2, g^{12} &\equiv 4, g^{10} &\equiv 2^3 \\ (2, 1) &> (2, 2) > (2, 2^2) > (2, 2^3) & g=6 & g^2 &\equiv 2, g^4 &\equiv 2^2, g^6 &\equiv g^3\end{aligned}$$

Je vois avec regret que l'ouvrage que vous faites imprimer est écrit en allemand, car cette langue m'est entièrement inconnue, mais je serois tantée de l'apprendre un peu, comme j'ai fait la latine, afin de n' être pas privée de la connoissance de vos méthodes. Je crois aisément que la librairie à beaucoup souffert de cette malheureuse











In der Tat aber hat Zeno nach elementarster Logik die Bedingung eines Schlusses gar nicht erfüllt: es fehlt darin das zweite Glied. Ergänzt man dieses, so lautet die Schlussfolgerung: Wenn Achilles da ankommt, wo die Schildkröte war, ist die Sch. schon weiter. Nun befindet sich aber Ach. in aller Folgezeit in einem Punkte, wo die Sch. war. Folglich holt er sie in aller Folgezeit nicht ein. Nur das erste Glied wird bewiesen, das zweite ist offenbar grundlos und wird gar nicht ausgesprochen. Jeder Athener hätte also die Lücke bemerken können. Aber wol konnte man damals wie noch heute darauf speculiren, dass geistreichen, delicates Leuten die Pedanterie des engen Anschlusses mit Wiederholung der Worte zuwider ist, und dass sie darum gern auf Anhörung des zweiten Gliedes verzichten. Erst wenn jemand versucht hätte, die Ergänzung zu beweisen, würde er vielleicht auf die obige Frage gestossen sein, ob die Summe unendlich vieler Glieder unendlich gross sein muss. Der Verfasser sagt nun im Vorwort, seine Darstellung weiche in gewissen, genannten Paragraphen von der gewöhnlichen ab. Diese behandeln gerade das Principielle und sind unrichtig, daher ist die Bearbeitung überhaupt wertlos, und wir wollen wünschen, dass die Herausgabe des in Aussicht gestellten II. und III. Teils unterbleiben möge.

Hoppe.

### Berichtigungen.

T. LXV. S. 445. Z. 2 v. unt. fehlt die Angabe, dass die (Coord.) des Durchschnittspunkts der Diagonalen mit  $\xi_1, \eta_1$  (bezeichnet sind).  
Ebenda S. 447

Z. 1 und 5 v. ob.	statt $d$	setze $D$
„ 4	„ „ $\gamma$	„ je
„ 14	„ „ $\Sigma(n-1)$	„ $\Sigma_n$
„ 8	v. unt. „ $\binom{m}{n}$	„ $\binom{n}{m}$























# Litterarischer Bericht

CCLXIII.

## Praktische Geometrie, Geodäsie.

1. Terrainlehre, Terraindarstellung und das militärische Auf-  
 . Mit Berücksichtigung der neuesten Bestimmungen der  
 preussischen Landesaufnahme bearbeitet von Kossmann,  
 russ. Major und Battaillonscommandeur. Mit über 100 Fi-  
 n Holzstich. Fünfte, sehr verbesserte Auflage. Potsdam 1894  
 n. 288 S.

t dem Erscheinen der 4. Auflage dieses Buchs sind für die  
 u der topographischen Abteilung der Landesaufnahme so viel  
 bändernde Bestimmungen ergangen, welche in der vorliegenden  
 Auflage Berücksichtigung finden mussten, dass dieselbe in dem  
 3. Haupttheil: „Theorie des Planzeichnens“ und „militärischen  
 men“ wesentliche Änderungen und Zusätze gegen die 4. Auf-  
 ifuet. Dessenbeziehen sich vorzugsweise auf die Fest-  
 en über den Normal-Höhenpunkt, über die Voraussetzung der  
 Äquivalenz von Jahr 1870 für die Höhenveränderungen der  
 phischen Arbeiten, über den Gebrauch der zum 1. Jan. 1870  
 für die Längenmaße der Meeresküsten und Flä- und auf  
 vierung der Höhen, welche imgezeichnete, neue Geodä-  
 tische Bestimmungen. Der Inhalt des 1. Theils der Buch-  
 de Mathematik, die in der 4. Auflage enthalten waren, ist  
 e für die praktische Anwendung der Geodäsie, die in der  
 2. Theil: „Darstellung der Terrain“ enthält, ist in der 4. Auflage  
 der 1. Theil, die in der 4. Auflage enthalten waren, ist in der  
 2. Theil, die in der 4. Auflage enthalten waren, ist in der  
 3. Theil, die in der 4. Auflage enthalten waren, ist in der  
 4. Theil, die in der 4. Auflage enthalten waren, ist in der  
 5. Theil, die in der 4. Auflage enthalten waren, ist in der  
 6. Theil, die in der 4. Auflage enthalten waren, ist in der  
 7. Theil, die in der 4. Auflage enthalten waren, ist in der  
 8. Theil, die in der 4. Auflage enthalten waren, ist in der  
 9. Theil, die in der 4. Auflage enthalten waren, ist in der  
 10. Theil, die in der 4. Auflage enthalten waren, ist in der











Catalan: Einige ungewöhnliche Sätze. — Ein neuer empirischer Satz. H.

Nova Acta Regiae Societatis Upsaliensis. Seriei tertiae vol. X. Upsaliae MDCCCLXXIX.

Gleichwie im litt. Bericht von den 2 vorhergehenden Bänden, geben wir hier den Inhalt des gegenwärtigen an mathematischen Abhandlungen.

M. Falk: Methode das grösste gemeinsame Mass zweier rationaler ganzer Functionen zu finden.

H. T. Daug: Formeln zur Bestimmung der Gleichungen einer Curve, von welcher man verschiedene Eigenschaften bezüglich auf Krümmung und Torsion kennt.

M. Falk: Ueber die Eliminationsmethode von Bezout und Cauchy.

C. F. E. Björling: Ueber entsprechende Singularitäten in algebraischen ebenen Curven. H.

---





















1. The first part of the document is a list of names and titles, including the names of the authors and the titles of the works. This list is organized in a table format with two columns: the first column contains the names of the authors, and the second column contains the titles of the works. The names are listed in alphabetical order, and the titles are listed in the order in which they appear in the document.



1

1

















































